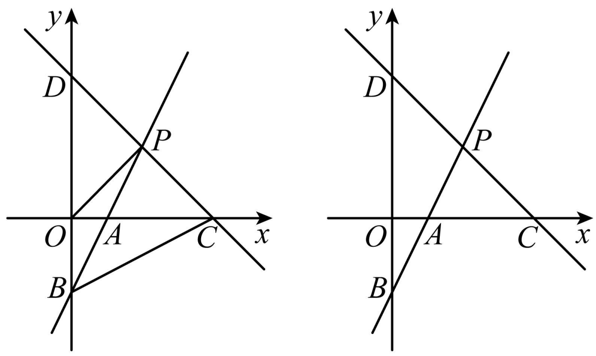
一次函数培优10题

1．（2023春·重庆北碚·八年级西南大学附中校考期中）如图，在平面直角坐标系中，直线$y=2x-2$与x轴、y轴分别交于点A、点B，与直线$CD:y=kx+b$（$k\neq 0$）交于点P，$OC=OD=4OA$．



备用图

(1)求直线CD的解析式；

(2)连接OP、BC，若直线AB上存在一点Q，使得$S_{\triangle PQC}=S_{四边形OBCP}$，求点$Q$的坐标；

(3)将直线CD向下平移1个单位长度得到直线，直线l与x轴交于点E，点N为直线l上的一点，在平面直角坐标系中，是否存在点M，使以点O，E，N，M为顶点的四边形是矩形？若存在，请直接写出点M的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $y=-x+4$；

(2) $(-\frac{2}{3},-\frac{10}{3})$或$(\frac{14}{3},\frac{22}{3})$；

(3) $(3,3)$或$(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$；

【分析】(1）先求出OA，然后求出点C和点D的坐标，利用待定系数法，即可求出解析式；

（2）先求出点B和点P的坐标，然后求出四边形$OBCP$的面积，然后分类讨论：当点Q在点B的下方时；当点Q在点P的上方时；分别求出三角形PQC的面积，即可求出点Q的坐标；

（3）先求出直线l为$y=-x+3$，然后得到$OE=3$，然后分情况进行分析：当$OE=3$作为矩形$OEMN$的边时；当$OE=3$作为矩形$OEMN$的对角线时；分别求出两种情况的点M的坐标即可．

【详解】(1）解：∵直线$y=2x-2$与x轴、y轴分别交于点A、点B，

∴令$y=0$，则$x=1$，

∴点A为$(1,0)$，

∴ $OA=1$，

∵ $OC=OD=4OA=4$，

∴点 C 为 $(4,0)$，点 D 为 $(0,4)$，

∴直线 CD 的解析式为 $y=-x+4$；

（2）解：在 $y=2x-2$ 中，令 $x=0$，则 $y=-2$，

∴点 B 为 $(0,-2)$，

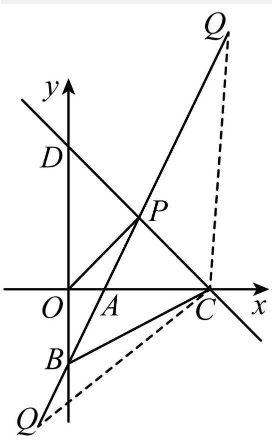
∵ $\begin{cases} y=2x-2 \\ y=-x+4 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$，

∴点 P 的坐标为 $(2,2)$；

∴ $S_{\text{四边形}OBCP}=\frac{1}{2}OC\times|y_P|+\frac{1}{2}OC\times OB=\frac{1}{2}\times4\times2+\frac{1}{2}\times4\times2=8$；

∵点 Q 在直线 AB 上，则设点 Q 为 $(x,2x-2)$，则

当点 Q 在点 B 的下方时，如下图：



∵ $AC=3$，点 P 的坐标为 $(2,2)$，

∴ $S_{\triangle PQC}=\frac{1}{2}AC\times|y_P|+\frac{1}{2}AC\times|y_Q|=\frac{1}{2}\times3\times2+\frac{1}{2}\times3\times|2x-2|=3+\frac{3}{2}\times|2x-2|$，

∵ $S_{\triangle PQC}=S_{\text{四边形}OBCP}$，

∴ $3+\frac{3}{2}\times|2x-2|=8$，

∴ $\frac{3}{2}\times(2-2x)=5$，

解得：$x=-\frac{2}{3}$，

∴ $2x-2=2\times(-\frac{2}{3})-2=-\frac{10}{3}$，

∴点 Q 的坐标为 $(-\frac{2}{3},-\frac{10}{3})$；

当点 Q 在点 P 的上方时，如上图：

$S_{\triangle PQC}=\frac{1}{2}AC\times|y_Q|-\frac{1}{2}AC\times|y_P|=\frac{1}{2}\times3\times|2x-2|-\frac{1}{2}\times3\times2=\frac{3}{2}\times|2x-2|-3$,

$\therefore\frac{3}{2}\times|2x-2|-3=8$,

$\therefore\frac{3}{2}\times(2x-2)=11$

解得：$x=\frac{14}{3}$，

$\therefore 2x-2=2\times\frac{14}{3}-2=\frac{22}{3}$，

$\therefore$点Q的坐标为$(\frac{14}{3},\frac{22}{3})$；

综合上述，点Q的坐标为$(-\frac{2}{3},-\frac{10}{3})$或$(\frac{14}{3},\frac{22}{3})$；

（3）解：$\because$直线CD向下平移1个单位长度得到直线l，

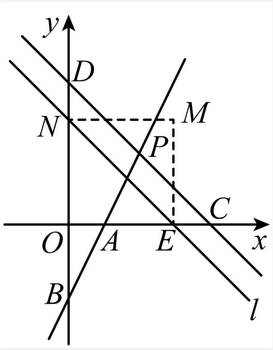
$\therefore$直线l为$y=-x+3$，

令$y=0$，则$x=3$，

$\therefore$点E的坐标为$(3,0)$，

即$OE=3$；

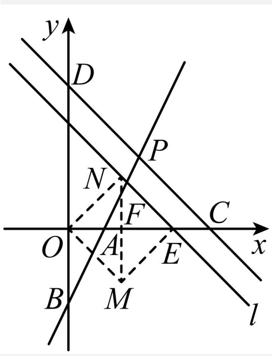
当$OE=3$作为矩形$OEMN$的边时，如图：



$\therefore$点N的坐标为$(0,3)$，

$\therefore$点M的坐标为$(3,3)$；

当$OE=3$作为矩形$OEMN$的对角线时，如图：



$\therefore$点F的坐标为$(\frac{3}{2},0)$，

∵ $\tan\angle OEN=|-1|=1$，

∴ $\angle OEN=45°$，

∵ $ON\perp NE$，

∴ ΔONE 是等腰直角三角形，

∴ $ON=NE$，

∴四边形 $ONEM$ 是正方形，

∴ $MN\perp OE$， $MN=OE$，

∴ $OF=FE=FN=FM=\frac{3}{2}$，

∴点 M 的坐标为 $(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$；

综合上述，则点 M 的坐标为 $(3,3)$ 或 $(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$；

【点睛】本题考查了矩形的性质，一次函数的图像和性质，坐标与图形，等腰直角三角形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握所学的知识，正确的作出图形，从而运用分类讨论的思想进行解题．

2．（2023 春·重庆九龙坡·八年级重庆实验外国语学校校考期中）如图 1．在平面直角坐标系中，直线 l 与 x 轴，y 轴交于 $A\left(-2\sqrt{3},0\right)$、$B\left(0,-2\right)$ 两点．将直线 $y=\sqrt{3}x$ 竖直向上平移 2 个单位后与 l 交于点 C，与 y 轴交于 D．

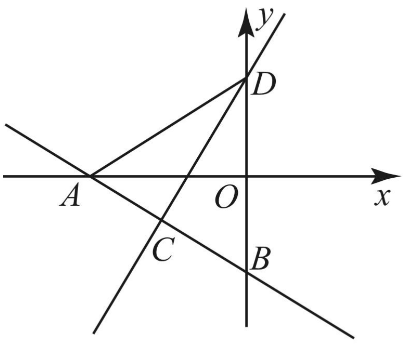


图1

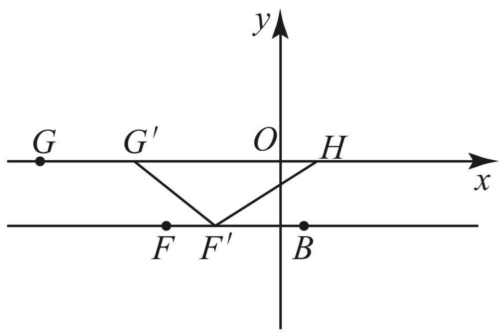


图2

(1)求点 C 的坐标；

(2)连接 AD，在直线 CD 上是否存在点 E，使得 $S_{\triangle EAC}=2S_{\triangle DAC}$．若存在，求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3)如图 2，已知 $G\left(-7.5,0\right)$，$H\left(1,0\right)$，过 B 作 $BF\parallel x$ 轴且 $BF=3.5$；若点 G 沿 GH 方向以每秒 2 个单位长度运动，同时，F 点沿 FB 方向以每秒 1 个单位长度运动经过 t 秒的运动，G 到达 G' 处，F 到达 F' 处，连接 $F'H$、$F'G'$．问：$F'G'$ 能否平分 $\angle FF'H$？若能，请直接写出 t 的值；若不能，请说明理由．

【答案】(1)$\left(-\sqrt{3},-1\right)$

(2)存在，$E_1\left(-3\sqrt{3},-7\right)$，$E_2\left(\sqrt{3},5\right)$

(3)能，t的值为3

【分析】（1）根据题意利用待定系数法先求出直线AB的解析式，由平移2个单位长度得到直线CD的函数解析式，再与直线AB的解析式联立，求解即可；

（2）先求出$\triangle ACD$的面积，设点$E\left(m,\sqrt{3}m+2\right)$，用含有的$m$的代数式表示$\triangle AEC$的面积，根据$S_{\triangle EAC}=2S_{\triangle DAC}$列方程求解即可；

（3）利用角平分线和平行线的性质得到$G'H=F'H$，再分别利用线段的和差关系以及勾股定理用含有t的代数式表示$G'H,F'H$，最后列方程求解即可．

【详解】（1）解：设直线AB的解析式为：$y=kx+b$

把$A\left(-2\sqrt{3},0\right)$、$B\left(0,-2\right)$代入得：$\begin{cases}-2\sqrt{3}x+b=0\\ b=-2\end{cases}$

解得：$\begin{cases}k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ b=-2\end{cases}$

∴直线AB：$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2$

∵直线CD由$y=\sqrt{3}x$竖直向上平移2个单位得到，

∴直线CD：$y=\sqrt{3}x+2$

联立得：$\begin{cases}y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2\\ y=\sqrt{3}x+2\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ y=-1\end{cases}$

∴点C的坐标为$\left(-\sqrt{3},-1\right)$

（2）解：设直线CD与x轴交于点H，

当$y=0$时，$0=\sqrt{3}x+2$

解得：$x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

∴$OH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore AH = OA - OH = 2\sqrt{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore S_{\triangle DAC} = S_{\triangle ACH} + S_{\triangle ADH} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \times 1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$

$\because$点E在直线CD，

设点$E\left(m, \sqrt{3}m + 2\right)$

①当点E在DC延长线上时，

则$S_{\triangle ACE} = S_{\triangle AEH} - S_{\triangle ACH} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \times \left(-\sqrt{3}m - 2\right) - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \times 1 = -2m - 2\sqrt{3}$

$\because S_{\triangle EAC} = 2S_{\triangle DAC}$

$\therefore -2m - 2\sqrt{3} = 2 \times 2\sqrt{3}$

解得： $m = -3\sqrt{3}$

$\therefore$点$E\left(-3\sqrt{3}, -7\right)$

②当点E在CD延长线上时，

则$S_{\triangle ACE} = S_{\triangle AEH} + S_{\triangle ACH} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \times \left(\sqrt{3}m + 2\right) + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \times 1 = 2m + 2\sqrt{3}$

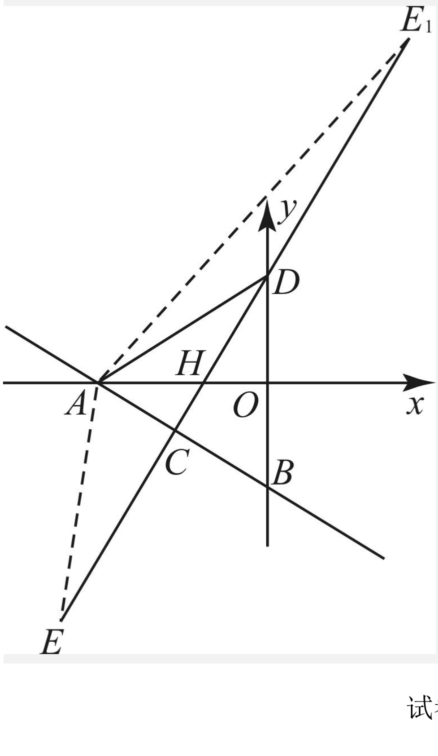
$\because S_{\triangle EAC} = 2S_{\triangle DAC}$

$\therefore 2m + 2\sqrt{3} = 2 \times 2\sqrt{3}$

解得： $m = \sqrt{3}$

$\therefore$点$E\left(\sqrt{3}, 5\right)$

$\therefore$存在，点E的坐标为$\left(-3\sqrt{3}, -7\right)$和$\left(\sqrt{3}, 5\right)$



（3）过点H作$HN\perp FB$

∵ $BF\parallel x$轴

$\therefore \angle FF'G'=\angle F'G'H$

∵ $F'G'$ 平分 $\angle FF'H$

∴ $\angle FF'G'=\angle G'F'H$

∴ $\angle HG'F'=\angle HF'G'$，

∴ $G'H=F'H$

$\because G\left(-7.5,0\right),H\left(1,0\right),B\left(0,-2\right)$

$\therefore GH=1-\left(-7.5\right)=8.5$

$\therefore G'H=8.5-2t$

$\because BF=3.5$

$\therefore BF'=3.5-t$

$\therefore F'N=4.5-t$

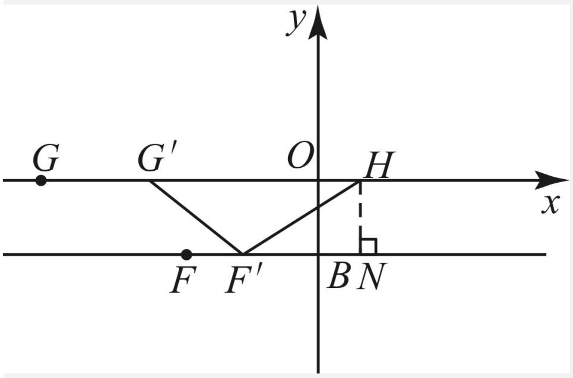
$\because HN=2$，

∴ $F'N^2+HN^2=\left(HF'\right)^2=\left(HG'\right)^2$

$\therefore 2^2+\left(4.5-t\right)^2=\left(8.5-2t\right)^2$

解得：$t_1=3,t_2=\dfrac{16}{3}$（舍去）

∴能，$t=3$.



【点睛】本题主要考查一次函数与几何综合，熟练掌握直线的交点坐标的求法以及利用角平分线的性质以及平行线的性质得到等腰三角形并列方程求解是解决本题的关键.

3.（2023春·重庆万州·九年级重庆市万州第一中学校联考期中）如图1，直线$l_1:y=-\dfrac{1}{4}x+1$与x轴，y轴分别交于A，B两点，直线l_2与x轴，y轴分别交于C，D两点，两直线相交于点P，已知点C的坐标为$(-2,0)$，点P的横坐标为$-\dfrac{4}{5}$.

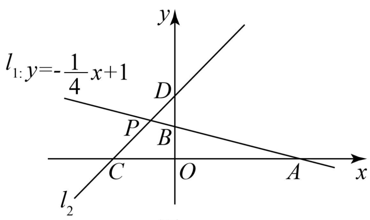


图1

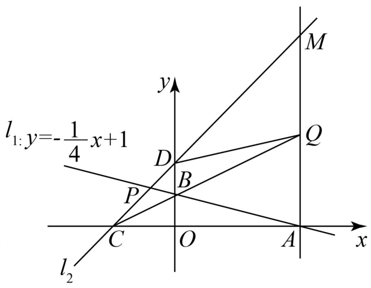
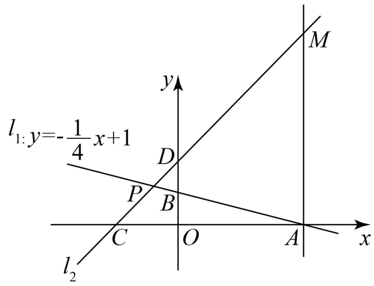


图2



备用图

(1)直接写出点 A、P 的坐标，并求出直线 l_2 的函数表达式；

(2)如图 2，过点 A 作 x 轴的垂线，交直线 l_2 于点 M，点 Q 是线段 AM 上的一动点，连接 QD，QC，当 $\triangle QDC$ 的周长最小时，求点 Q 的坐标和周长的最小值.

(3)在第（2）问的条件下，若点 N 是直线 AM 上的一个动点，以 D，Q，N 三点为顶点的三角形是等腰三角形，请直接写出此时点 N 的坐标.

【答案】(1) $A(4,0)$，$P\left(-\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right)$； $y=x+2$

(2)点 Q 的坐标为 $Q\left(4,\frac{6}{5}\right)$,周长的最小值 $2\sqrt{2}+4\sqrt{26}$,

(3) $\left(4,\frac{58}{5}\right)$ 或 $\left(4,\frac{14}{5}\right)$ 或 $\left(4,\frac{6+4\sqrt{26}}{5}\right)$ 或 $\left(4,\frac{6-4\sqrt{26}}{5}\right)$

【分析】（1）对于 $l_1: y=-\frac{1}{4}x+1$，令 $y=0$，求出 $x=4$ 可得点 A 的坐标，再把点 P 的横坐标代入 $y=-\frac{1}{4}x+1$，求出 x 的值即可得到点 P 的坐标，再运用待定系数法求出直线 l_2 的解析式即可；

（2）先求出点 D 的坐标，再运用勾股定理求出 $CD=2\sqrt{2}$，过点 D 作 AM 的对称点 D'，得 $D'(8,2)$，连接 $D'C$，交 AM 于占 M，由两点之间，线段最短可知 $DQ+CQ$ 的最小值为 $D'C$ 的长，从而可得 $\triangle CDQ$ 周长的最小值，再运用待定系数法求出直线 $D'C$ 的解析式，进一步可得出点 Q 的坐标；

（3）设 $N(4,t)$，分别求出 DN、QN、DQ 的长，再分 $DN=QN$，$DN=DQ$，$QN=DQ$ 三种情况讨论求解即可.

【详解】（1）对于 $y=-\frac{1}{4}x+1$，当 $y=0$ 时，$-\frac{1}{4}x+1=0$，

解得，$x=4$，

$\therefore A(4,0)$，

$\because$ 点 P 的横坐标为 $-\frac{4}{5}$，

$\therefore y=-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+1=\frac{6}{5}$,

$\therefore P\left(-\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right)$；

设直线l_2的解析式为$y=kx+b$,

把$C(-2,0),P\left(-\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right)$代入$y=kx+b$,得,

$\begin{cases}-2k+b=0\\-\frac{4}{5}k+b=\frac{6}{5}\end{cases}$,

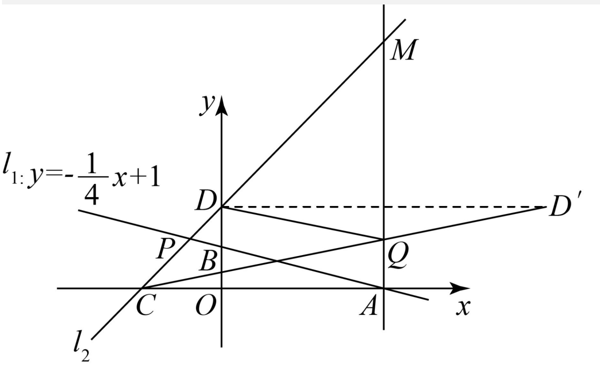
解得：$\begin{cases}k=1\\b=2\end{cases}$,

∴直线l_2的解析式为$y=x+2$；

（2）对于直线$y=x+2$，当$x=0$时，$y=2$,

∴$D(0,2)$,

过点D作点D关于AM的对称点D'，连接$D'C$交AM于点D'，



根据“两点之间，线段最短”可知，$DQ+CQ$的最小值为$D'C$的长,

∵$D(0,2)$,

∴$D'(8,2)$

又$C(-2,0)$

∴$CD'=\sqrt{[8-(-2)]^2+(2-0)^2}=4\sqrt{26}$，$CD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

∴$\triangle CDQ$的周长最小值为：$CD+CD'=2\sqrt{2}+4\sqrt{26}$,

设$D'C$的解析式为：$y=mx+n$,

把$C(-2,0)$，$D'(8,2)$代入$y=mx+n$,得,

$\begin{cases}-2m+n=0\\8m+n=2\end{cases}$,

解得，$\begin{cases} m=\dfrac{1}{5} \\ n=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

∴直线 $D'C$ 的解析式为 $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{2}{5}$,

当 $x=4$ 时，$y=\dfrac{1}{5}\times 4+\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}$,

∴ $Q\left(4,\dfrac{6}{5}\right)$；

（3）设 $N(4,t)$，

∵ $Q\left(4,\dfrac{6}{5}\right)$，$C(-2,0)$，

∵ $DN^2=(0-4)^2+(2-t)^2=(2-t)^2+16$,

$QN^2=\left(t-\dfrac{6}{5}\right)^2$,

$DQ^2=(0-4)^2+\left(2-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{416}{25}$.

当 $DN=QN$ 时，有 $DN^2=QN^2$,

∵ $(2-t)^2+16=\left(t-\dfrac{6}{5}\right)^2$，

解得，$t=\dfrac{58}{5}$,

∴ $N\left(4,\dfrac{58}{5}\right)$；

当 $DN=DQ$ 时，有 $DN^2=DQ^2$,

∴ $(2-t)^2+16=\dfrac{416}{25}$，

解得，$t_1=\dfrac{14}{5}$，$t_2=\dfrac{6}{5}$（不符合题意，舍去）

∴ $\mathrm{N}\left(4,\dfrac{14}{5}\right)$

当 $QN=DQ$时，有 $QN^2=DQ^2$,

∴ $\left(t-\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{416}{25}$，

解得，$t=\dfrac{6+4\sqrt{26}}{5}$，$t_2=\dfrac{6-4\sqrt{26}}{5}$，

∴ $N\left(4,\dfrac{6+4\sqrt{26}}{5}\right)$ 或 $N\left(4,\dfrac{6-4\sqrt{26}}{5}\right)$，

综上,点 N 的坐标为: $\left(4,\frac{58}{5}\right)$或$\left(4,\frac{14}{5}\right)$或$\left(4,\frac{6+4\sqrt{26}}{5}\right)$或$\left(4,\frac{6-4\sqrt{26}}{5}\right)$

【点睛】本题考查一次函数综合题、三角形的面积、等腰三角形的性质和判定、最短问题等知识,解题的关键是灵活应用所学知识解决问题,学会用分类讨论的思想思考问题,学会利用对称解决最值问题.

4.（2022 秋·重庆云阳·九年级校考阶段练习）如图 1，已知在平面直角坐标系中，$A(\frac{3}{2},0)$，$B(4,0)$，$C(0,3)$，$D\left(\frac{11}{2},3\right)$，过点 C 作 $CD \parallel x$ 轴，与直线 AD 交于点 D，直线 AD 与 y 轴交于点 E，连接 AC 、 BD .

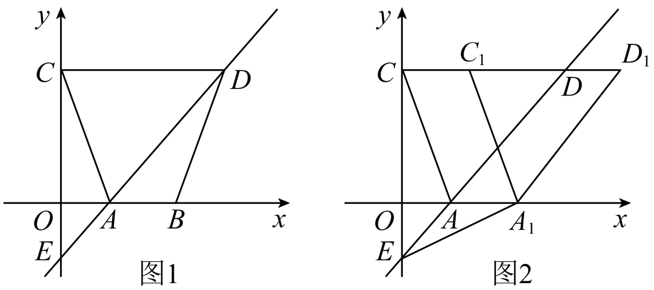


图1　　图2

(1)求直线 AD 的解析式和线段 BD 所在直线的解析式.

(2)如图 2，将 $\triangle CAD$ 沿着直线 CD 向右平移得 $\triangle C_1A_1D_1$，当 $C_1A_1 \perp EA_1$ 时，在 x 轴上是否存在点 M ，使 $\triangle A_1D_1M$ 是以 A_1D_1 为腰的等腰三角形，若存在，求出 $\triangle A_1D_1M$ 的周长；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) AD： $y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{8}$， BD： $y=2x-8$

(2)存在，$10+3\sqrt{10}$ 或$10+\sqrt{10}$ 或 18

【分析】（1）直接根据点的坐标，利用待定系数法求解即可；

（2）求出直线 EA_1 的解析式可得 A_1 坐标，分两种情形当 $A_1D_1=AM=5$ 时，当 $D_1A_1=D_1M$ 时，分别求解即可解决问题.

【详解】（1）

解：设直线 AD 的解析式为 $y=kx+b$，

则有$\begin{cases}\frac{3}{2}k+b=0\\ \frac{11}{2}k+b=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=\frac{3}{4}\\ b=-\frac{9}{8}\end{cases}$

$\therefore$直线 AD 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{8}$.

设直线 BD 的解析式为 $y=k'x+b'$，

则有$\begin{cases}4k'+b'=0\\ \frac{11}{2}k'+b'=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}k'=2\\ b'=-8\end{cases}$，

$\therefore$直线BD的解析式为$y=2x-8$．

（2）

如图2中，

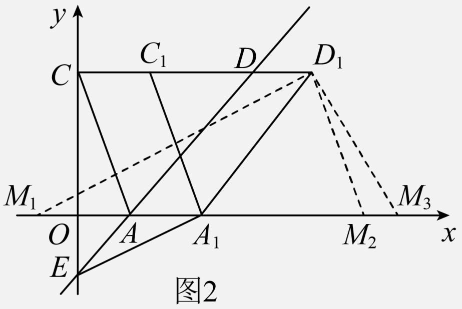


图2

$\because C(0,3)$，$A(\frac{3}{2}，0)$，

同（1）可求：直线AC解析式为$y=-2x+3$，

$\because$直线AD的解析式为$y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{8}$，

令$x=0$，则$y=-\frac{9}{8}$，

$\therefore E\left(0,-\frac{9}{8}\right)$，

$\because AC \mathbin{/\mkern-5mu/} A_1C_1$，$A_1C_1\perp EA_1$，

$\therefore AC\perp EA_1$，

$\therefore$设直线EA_1的解析式为$y=\frac{1}{2}x+a$，将$E\left(0,-\frac{9}{8}\right)$代入，

得$-\frac{9}{8}=\frac{1}{2}\times0+a$，则$a=-\frac{9}{8}$，

$\therefore$直线EA_1的解析式为$y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{8}$，

令$y=0$，则$x=\frac{9}{4}$，

$\therefore A_1(\frac{9}{4}，0)$，

$\therefore$平移距离为$\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$，

$\therefore D_1\left(\frac{11}{2}+\frac{3}{4},3\right)$，即$D_1\left(\frac{25}{4},3\right)$，又$A_1\left(\frac{9}{4},0\right)$，

$\therefore A_1D_1=\sqrt{\left(\frac{25}{4}-\frac{9}{4}\right)^2+(3-0)^2}=5$

当$A_1D_1=A_1M=5$时，$M_1(-\frac{11}{4}，0)$，

$\therefore D_1M_1=\sqrt{\left(-\frac{11}{4}-\frac{25}{4}\right)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{10}$，

则$\triangle A_1D_1M_1$的周长为：$A_1D_1+A_1M_1+D_1M_1=5+5+3\sqrt{10}=10+3\sqrt{10}$；

$M_2(\frac{29}{4}，0)$，

$\therefore D_1M_2=\sqrt{\left(\frac{29}{4}-\frac{25}{4}\right)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$，

则$\triangle A_1D_1M_2$的周长为：$A_1D_1+A_1M_2+D_1M_2=5+5+\sqrt{10}=10+\sqrt{10}$；

当$A_1D_1=D_1M$时，$M_3(\frac{41}{4}，0)$，

$\therefore A_1M_3=\frac{41}{4}-\frac{9}{4}=8$，

则$\triangle A_1D_1M_3$的周长为：$A_1D_1+A_1M_3+D_1M_3=5+8+5=18$；

综上所述，存在点M，使$\triangle A_1D_1M$是以A_1D_1为腰的等腰三角形，周长为$10+3\sqrt{10}$或$10+\sqrt{10}$或18.

【点睛】本题考查一次函数综合题、等腰三角形、平移变换、勾股定理、两点间距离公式等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，学会利用参数构建方程解决问题，属于中考压轴题.

5.（2023春·重庆沙坪坝·八年级重庆一中校考阶段练习）如图1，在平面直角坐标系中，直线$y=2x+6$与x轴交于点C，与直线AB：$y=kx+3$交于点A，且$B(3,0)$，$AD\perp x$轴于点D，直线AB与y轴交于E点，点F为线段AB中点.

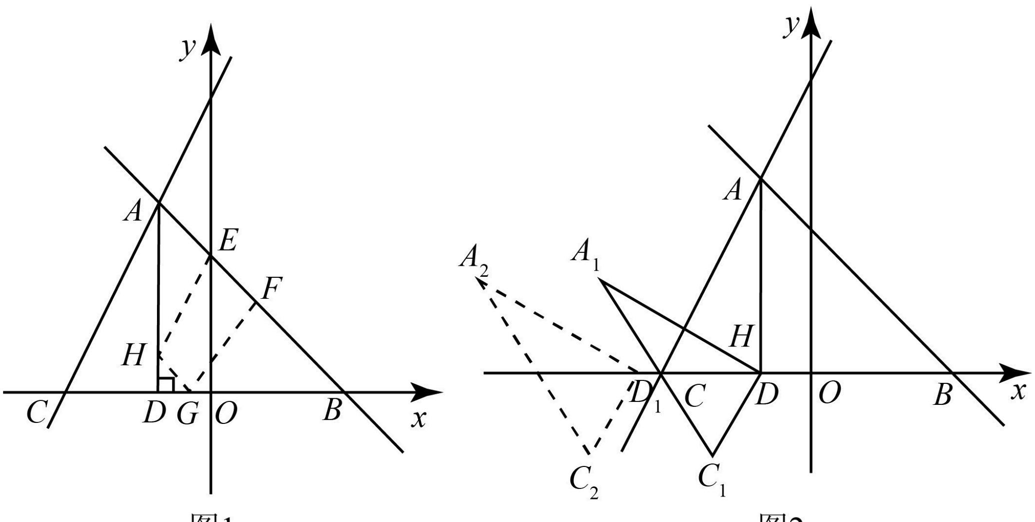


图1　　　　图2

(1)求点A的坐标；

(2)已知动点G在x轴上，动点H在直线AD上，当四边形$EFGH$周长最小时，连HF，

请求出此时$\triangle HEF$的面积；

(3)在第（2）问的条件下，将$\triangle ACD$绕D点逆时针旋转$60°$后得到$\triangle A_1C_1D$，再沿着x轴平移得到$\triangle A_2C_2D_1$（如图2），在直线AC上是否存在点P，使得以H，A_2，P为顶点的三角形为以HP为斜边的等腰直角三角形，若存在，请直接写出点A_2的坐标，若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $A(-1,4)$

(2)当四边形$EFGH$周长最小时，$S_{\triangle HEF}=\frac{4}{3}$

(3)存在，A_2的坐标为$\left(-\frac{5}{3},2\right)$或$\left(-\frac{19}{9},2\right)$

【分析】（1）将点$B(3,0)$代入，$AB:y=kx+3$，得出$k=-1$，联立两直线求得点A的坐标；

（2）分别作E,F关于AD，BO的对称点E',F'，设FF'交x轴于点K，此时四边形$EFGH$周长为最小，求出直线$E'F'$的解析式为$y=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$，继而得出$H$点的坐标，然后根据$S_{\triangle HEF}=S_{\triangle AHF}-S_{\triangle AHE}$即可求解；

（3）根据旋转的性质得出A_2的纵坐标为2，即点A_2在直线$y=2$上运动，设$A_2(a,2)$，由直线AC的解析式为$y=2x+6$，设点$P(t,2t+6)$，分别表示出PH,A_2H,A_2P，根据勾股定理与等腰直角三角形的性质列出方程组，解方程组即可求解．

【详解】（1）解：将$B(3,0)$代入，$AB:y=kx+3$，

$\therefore 0=3k+3$，

解得：$k=-1$，

$\therefore$直线AB的解析式为$y=-x+3$，

联立$\begin{cases}y=-x+3\\y=2x+6\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$，

$\therefore A(-1,4)$；

（2）解：依题意，直线AB与y轴交于E点，点F为线段AB中点．

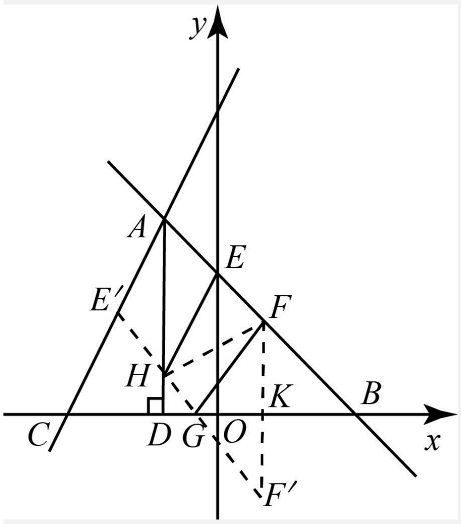
令 $y=-x+3$ 中， $x=0$ ，解得 $y=3$ ，

则 $E(0,3)$ ，

$\because A(-1,4), B(3,0)$ ，

则 $F(1,2)$ ，

如图所示，分别作 E,F 关于 AD ， BO 的对称点 E',F' ，设 FF' 交 x 轴于点 K ，连接 HE ，



则 $E'(-2,3)$ ， $F'(1,-2), K(1,0)$ ，

此时四边形 $EFGH$ 周长为最小，

设直线 $E'F'$ 的解析式为 $y=mx+n$ ，

$\therefore \begin{cases} -2m+n=3 \\ m+n=-2 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} m=-\dfrac{5}{3} \\ n=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ ，

$\therefore y=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$ ，

令 $x=-1$ ，解得： $y=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ ，

$\therefore H\left(-1,\frac{4}{3}\right)$ ，

$\therefore AH=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ ，

$\because A(-1,4)$ ， $E(0,3)$ ， $F(1,2)$ ，

$\therefore S_{\triangle HEF}=S_{\triangle AHF}-S_{\triangle AHE}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times2-\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times1$

$=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}$

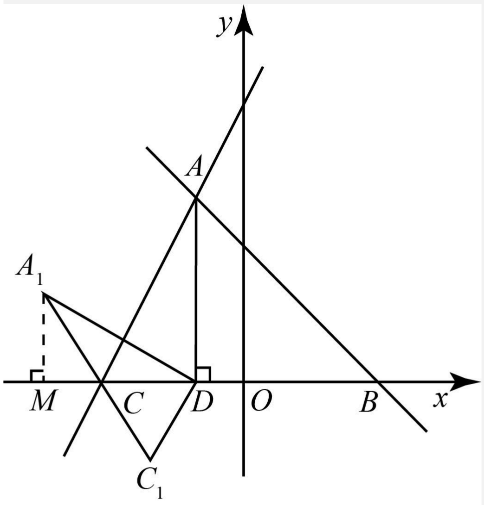
$=\frac{4}{3}$,

∴当四边形 $EFGH$ 周长最小时，$S_{\triangle HEF}=\frac{4}{3}$；

（3）解：由（1）知 $A(-1,4)$，$D(-1,0)$，

将 $\triangle ACD$ 绕 D 点逆时针旋转 $60°$ 后得到 $\triangle A_1C_1D$，则 $A_1D=AD=4$，$\angle ADA_1=60°$，

如图所示，过点 A_1 作 $A_1M\perp x$ 轴于点 M，则 $\angle A_1DM=30°$，



∴ $y_{A_1}=AM=\frac{1}{2}AD=2$，

∵沿着 x 轴平移得到 $\triangle A_2C_2D_1$，

∴ A_2 的纵坐标为 2 ,即点 A_2 在直线 $y=2$ 上运动，设 $A_2(a,2)$，

由直线 AC 的解析式为 $y=2x+6$，设点 $P(t,2t+6)$，

∵ $H\left(-1,\frac{4}{3}\right)$,

∴ $PH^2=(t+1)^2+\left(2t+6-\frac{4}{3}\right)^2=t^2+4t+\frac{17}{3}$，

$A_2H=(a+1)^2+\left(2-\frac{4}{3}\right)^2=a^2+2a+\frac{13}{9}$,

$A_2P=(a-t)^2+(2t+6-2)^2=5t^2+(16-2a)t+a^2+16$，

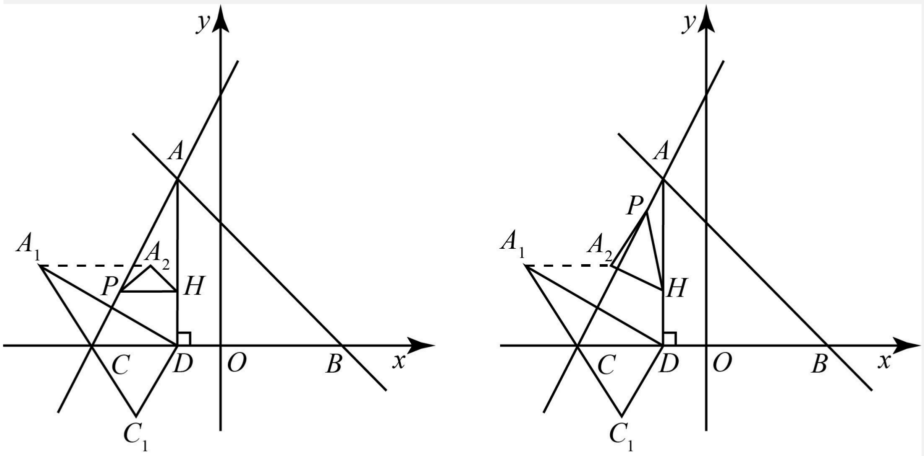
∵ H，A_2，P 为顶点的三角形为以 HP 为斜边的等腰直角三角形,

∴ $A_2H=A_2P$，$PH^2=2A_2H^2$，

$\therefore \begin{cases} (a+1)^2+\left(2-\dfrac{4}{3}\right)^2=(a-t)^2+(2t+6-2)^2 \\ (t+1)^2+\left(2t+6-\dfrac{4}{3}\right)^2=2\left[(a+1)^2+\left(2-\dfrac{4}{3}\right)^2\right] \end{cases}$,

解得：$\begin{cases} t=-\dfrac{7}{3} \\ a=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$或$\begin{cases} t=-\dfrac{13}{9} \\ a=-\dfrac{19}{9} \end{cases}$,

$\therefore A_2$的坐标为$\left(-\dfrac{5}{3},2\right)$或$\left(-\dfrac{19}{9},2\right)$.



【点睛】本题考查了轴对称的性质，旋转的性质，勾股定理，含30度角的直角三角形的性质，一次函数与几何综合，熟练掌握数形结合思想的应用是解题的关键.

6．（2022秋·重庆·九年级统考阶段练习）如图1，在平面直角坐标系中，一次函数$y=2x+2$的图象分别交x轴，y轴于A，B两点，将$\triangle AOB$绕点O顺时针旋转$90°$得$\triangle COD$（点A与点C对应，点B与点D对应）.

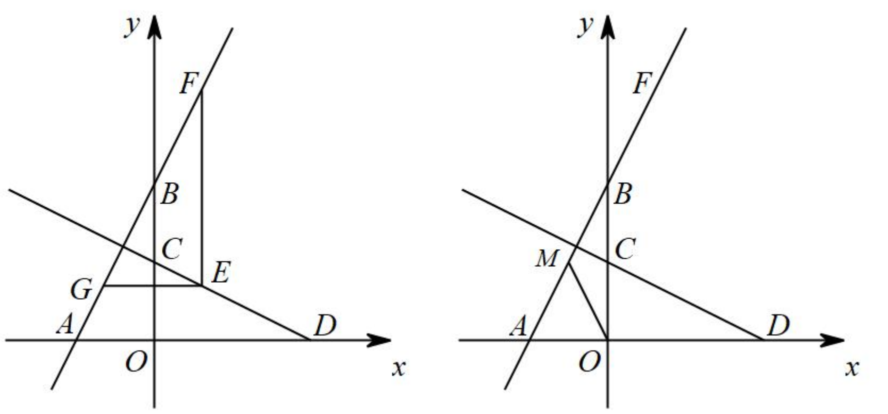


图1　　　　图2

(1)求直线CD的解析式；

(2)点E为线段CD上一点，过点E作$EF \parallel y$轴交直线AB于点F，作$EG \parallel x$轴交直线AB于点G，当$EF+EG=AD$时，求点E的坐标；

(3)如图2，若点M为线段AB的中点，点N为直线CD上一点，点P为坐标系内一点，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/548031124111006040