云南省昆明市第三中学 2023-2024 学年高二上学期 1 月期末考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．抛物线 $y\quad \frac{1}{4}x^2$ 的准线方程为（　）

A．$x\quad \frac{1}{16}$　　B．$x=\quad 1$　　C．$y\quad 1$　　D．$y=\quad 2$

2．设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_8=6, S_{21}=0$，则 a_1 的值为（　）

A．18　　B．20　　C．22　　D．24

3．下列求导运算错误的是（　）

A．$x^2\ln x\quad 2x\ln x\quad x$　　B．$\frac{x}{e^x}\quad \frac{1\quad x}{e^x}$

C．$x^2\quad 3^x\quad 2x\quad 3^x\lg 3$　　D．$\cos\ 2x\quad \frac{\pi}{6}\quad 2\sin 2x\quad \frac{\pi}{6}$

4．已知数列 a_n 是等差数列，数列 b_n 是等比数列，$a_7\quad a_9\quad \frac{4}{3}$，且 $b_2b_6b_{10}\quad 8$，则 $\frac{a_3\quad a_8\quad a_{13}}{b_4b_8\quad 1}$（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

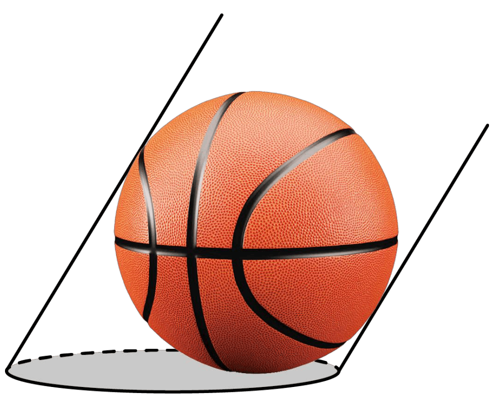
5．若点 $P\quad x,y$ 是圆 $C: x^2\quad y^2\quad 8x\quad 6y\quad 16\quad 0$ 上一点,则 $x^2\quad y^2$ 的最小值为（　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

6．已知数列 a_n 满足 $a_{n\ 1}\quad \frac{1}{1\quad a_n}$，$a_1\quad 1$，则 a_{100}（　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．2　　D．1

7．如图，一束平行光线与地平面的夹角为 60 ，一直径为 24cm 的篮球在这束光线的照射下，在地平面上形成的影子轮廓为椭圆，则此椭圆的离心率为（　）



A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　　　　　D．$\frac{1}{2}$

8．已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1)\quad f(1)\quad 0$，则下列描述正确的是（　）

A．点 $1, f(1)$ 与点 $1, f(1)$ 在 x 轴同侧

B．若 $f(x)$ 的图象在 $x\quad 1$ 处的切线斜率小于 0，则 $f(x)$ 一定存在点在 x 轴下方

C．$y\quad f(x)$ 与 $y\quad f(x)$ 的图象可能与 x 轴交于同一点

D．函数 $F(x)\quad f(x)\quad f(x)$ 不一定存在零点

二、多选题

9．已知 $F_1\quad 4, 0$ 、$F_2\quad 4, 0$，下列说法中正确的是（　）

A．平面内到 F_1、F_2 两点的距离相等的点的轨迹是直线

B．平面内到 F_1、F_2 两点的距离之差等于6的点的轨迹是双曲线的一支

C．平面内到 F_1、F_2 两点的距离之和等于8的点的轨迹是椭圆

D．平面内到 F_1、F_2 两点距离的平方和为12的点的轨迹是圆

10．已知数列 a_n 的前 n 项和为 S_n，下列说法正确的是（　）

A．若 $S_n\quad 2n^2\quad 6n\quad 1$，则 $a_n\quad 4n\quad 4$

B．若 $a_n\quad 4n\quad 25$，则 S_n 的最小值为 66

C．若 $a_n\quad 4n\quad 3$，则数列 $1^n a_n$ 的前17项和为 33

D．若数列 a_n 为等差数列，且 $a_{1011}\quad a_{1012}\quad 0, a_{1000}\quad a_{1024}\quad 0$，则当 $S_n\quad 0$ 时，n 的最大值为2023

11．下列函数在定义域上为增函数的有（　）

A．$f\ x\quad e^x\quad x$　　　　　　　　B．$f\ x\quad xe^x$

C．$f\ x\quad x\quad \sin x$　　　　　　　　D．$f\ x\quad x^2\quad \ln x$

12．已知 F_1，F_2 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{4}\quad\frac{y^2}{3}\quad 1$ 的左，右焦点，A 为 C 的上顶点，过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，则（　）

A．椭圆 C 的焦距为 2　　　　　　　　B．$|DE|\quad\frac{48}{13}$

C．$\triangle ADE$ 的面积为$1\quad\sqrt{3}$　　　　　　D．$\triangle ADE$ 的周长为8

三、填空题

13．记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3\quad a_1\quad 3$，$a_4\quad a_2\quad 6$，则S_5 ________．

14．已知双曲线$\frac{x^2}{m\quad 2}\quad\frac{y^2}{4\quad m}\quad 1$的焦点在$y$轴上，则离心率$e$的范围为________．

15．数学家杨辉在其专著《详解九章算术法》和《算法通变本末》中，提出了一些新的高阶等差数列．其中二阶等差数列是一个常见的高阶等差数列，如数列2，4，7，11，16从第二项起，每一项与前一项的差组成的新数列2，3，4，5是等差数列，则称数列2，4，7，11，16为二阶等差数列．现有二阶等差数列$\{a_n\}$，其前六项分别为1，3，6，10，15，21，则$\frac{a_n\quad 1}{n\quad 1}$的最小值为________．

16．抛物线$C:y^2\quad 2px\quad p\quad 0$的准线与$x$轴交于点$M$，过$C$的焦点$F$作斜率为2的直线交$C$于$A,B$两点，则$\tan\ AMB$ ________．

四、解答题

17．在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1\quad 4$，$a_4\quad a_3\quad 2a_2$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

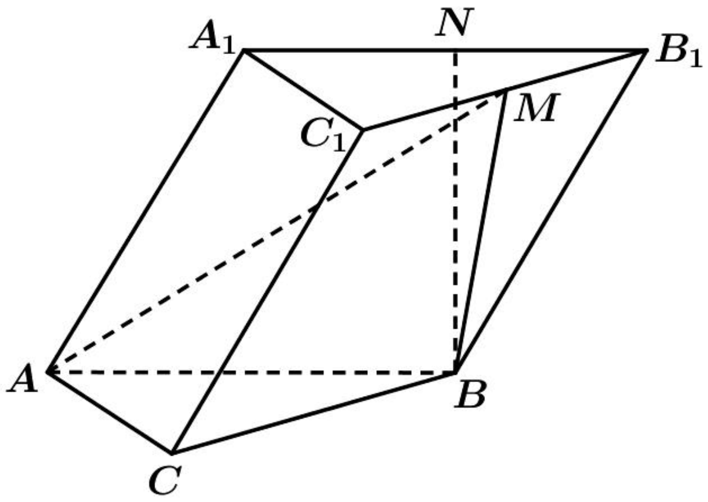
(2)若数列$\{b_n\}$满足：$b_n\quad\frac{4n^2}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的最大项．

18．已知函数$f\ x\quad x\quad a\ \ln x$．

(1)讨论 $f\ \ x$ 的单调性；

(2)若不等式 $xf\ \ x\quad 2\ \ x\ \ a$ 在 $1,$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

19．如图，已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，点 M ，N 分别是 B_1C_1 和 A_1B_1 的中点，$AA_1\quad AB\quad BM\quad 2$，$A_1AB\quad 60$.



（1）求证：BN 平面 $A_1B_1C_1$；

（2）求二面角 $M\quad AB\quad C$ 的余弦值.

20．记S_n为数列 a_n 的前n项和，已知：$a_1 \quad 1$，$a_n \quad 0$，$S_{n\,1}a_n \quad S_n a_{n\,1} \quad \frac{1}{2}a_{n\,1}a_n \quad n \quad N_*$．

(1)求证：数列 $\frac{S_n}{a_n}$ 是等差数列，并求数列 a_n 的通项公式：

(2)求数列 $(\ 1)_{n\ 1}a_n \quad 4_{a_n}$ 的前n项和T_n．

21．已知双曲线$\frac{x_2}{a_2} \quad \frac{y_2}{b_2} \quad 1$（a，b>0）的渐近线方程为$y \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$，左焦点为F（-2，0)．

(1)求双曲线C 的标准方程；

(2)过点Q（2，0）作直线l与双曲线C 右支交于A，B 两点，若$AQ \quad 2QB$，求直线l的方程.

22．以坐标原点为对称中心，坐标轴为对称轴的椭圆过点$C \ 0,\ 1$，$D(\frac{8}{5},\ \frac{3}{5})$．

(1)求椭圆的方程.

(2)设 P 是椭圆上一点（异于 C , D ），直线 PC , PD 与 x 轴分别交于 M , N 两点. 证明在 x 轴上存在两点 A, B ，使得 $MB \quad NA$ 是定值，并求此定值.

参考答案：

1．C

【分析】将题中抛物线的方程转化为标准方程，从而得解.

【详解】因为抛物线 $y \quad \frac{1}{4}x^2$ 可化为 $x^2 \quad 4y$，

所以其准线方程为 $y \quad 1$.

故选：C.

2．B

【分析】根据等差数列的通项公式和求和公式代入求解即可.

【详解】解：由题意得：

设等差数列的通项公式为 $a_n \quad a_1 \quad (n \quad 1)d$，则 $S_n \quad na_1 \quad \frac{n(n \quad 1)}{2}d$

$$\begin{cases} a_8=6 \\ S_{21}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+7d=7 \\ 21a_1+\frac{20\times 21}{2}d=0 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} d= \quad 2 \\ a_1=20 \end{cases}$

故选：B

3．C

【分析】根据导数的运算法则依次得出答案.

【详解】因为 $x^2\ln x \quad x^2 \quad \ln x \quad x^2 \quad \ln x \quad 2x\ln x \quad x^2 \quad \frac{1}{x} \quad 2x\ln x \quad x$，所以 A 选项正确；

因为 $\frac{x}{e^x} \quad \frac{x \quad e^x \quad x \quad e^x}{e^x \quad ^2} \quad \frac{e^x \quad xe^x}{e^x \quad ^2} \quad \frac{1 \quad x}{e^x}$，所以 B 选项正确；

因为 $x^2 \quad 3^x \quad x^2 \quad 3^x \quad 2x \quad 3^x\ln 3$，所以 C 选项错误；

因为 $\cos 2x \quad \frac{\pi}{6} \quad \sin 2x \quad \frac{\pi}{6} \quad 2x \quad \frac{\pi}{6} \quad 2\sin 2x \quad \frac{\pi}{6}$，所以 D 选项正确.

故选：C.

4．B

【分析】根据等差等比数列的性质即可求解.

【详解】解：数列 a_n 是等差数列，$a_7 \quad a_9 \quad \frac{4}{3}$，可得 $2a_8 \quad \frac{4}{3}$，即 $a_8 \quad \frac{2}{3}$，

数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，$b_2b_6b_{10}=8$，可得 $b_6^3=8$，可得 $b_6=2$，

则 $\frac{a_3+a_8+a_{13}}{b_4b_8-1}=\frac{3a_8}{b_6^2-1}=\frac{2}{4-1}=\frac{2}{3}$.

故选：B.

5．B

【分析】根据圆外一定点到圆上一点距离的平方的几何意义进行求解即可.

【详解】圆 $C:x^2+y^2-8x+6y+16=0$ 可化为 $(x-4)^2+(y+3)^2=9$.

x^2+y^2 表示点 $P(x,y)$ 到点 $O(0,0)$ 的距离的平方，

因为 $|CO|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，

所以 x^2+y^2 的最小值为 $(5-3)^2=4$.

故选：B.

6．A

【分析】根据题意，求得 $a_2=\frac{1}{2},a_3=2,a_4=-1,a_5=\frac{1}{2},\cdots$，得到数列 $\{a_n\}$ 构成以 4 项为周期的周期数列，即可求解.

【详解】由题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$，$a_1=-1$，可得 $a_2=\frac{1}{2},a_3=2,a_4=-1,a_5=\frac{1}{2},\cdots$，

所以数列 $\{a_n\}$ 构成以 3 项为周期的周期数列，则 $a_{100}=a_{3\times33+1}=a_1=-1$.

故选：A.

7．D

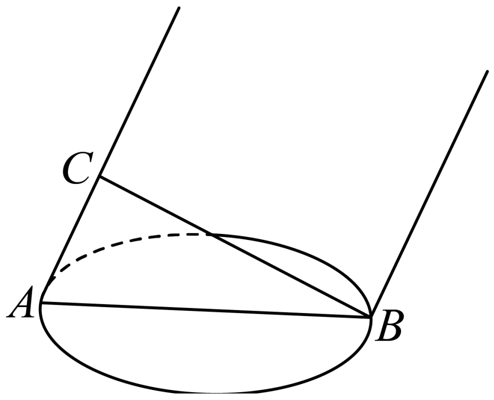
【分析】由图可得，求出椭圆的 a,b，再代入离心率公式，即可得到答案；

【详解】由图可得，椭圆的 $2b$ 为球的直径，故 $2b=24\Rightarrow b=12$，

椭圆的 $2a$ 为球在地面投影 AB，故 $2a=\frac{24}{\sin60^\circ}=\frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow a=\frac{24}{\sqrt{3}}$，

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}，$$

故选：D.



8．C

【分析】根据 $f(1)+f'(1)=0$，即可判断选项 A、C 与 D，选项 B 举出反例即可判断.

【详解】对于选项 A，因为 $f(1)+f'(1)=0$，则 $f(1)=-f'(1)$，所以点 $(1,f(1))$ 与点 $(1,f'(1))$ 关于 x 轴对称，不在 x 轴同侧，所以 A 错误；

对于选项 B，因为 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线斜率小于 0，所以 $f'(1)<0$，

又 $f(1)+f'(1)=0$，所以 $f(1)>0$， 如果 $f(x)=e^{-x}$，则 $f'(x)=-e^{-x}$，满足 $f(1)+f'(1)=0$，

且 $f'(1)<0$， $f(1)>0$，但 $f(x)=e^{-x}$ 的图象恒在 x 轴上方，所以 B 错误；

对于选项 C，因为 $f(1)+f'(1)=0$，如果 $f(1)=f'(1)=0$，则 $y=f(x)$ 与 $y=f'(x)$ 的图象可能与 x 轴交于同一点，所以 C 正确；

对于选项 D，因为 $F(x)=f(x)+f'(x)$，则 $F(1)=f(1)+f'(1)=0$，所以函数 $F(x)=f(x)+f'(x)$ 存在零点，所以 D 错误.

故选：C.

9．AB

【分析】根据中垂线的定义可判断 A 选项；利用双曲线的定义可判断 B 选项；根据椭圆的定义可判断 C 选项；求出动点的轨迹方程可判断 D 选项.

【详解】设所求动点为 P，由题意可得 $|F_1F_2|=8$.

对于 A 选项，由题意可知，$|PF_1|=|PF_2|$，则点 P 的轨迹为线段 F_1F_2 的垂直平分线，A 对；

对于 B 选项，由题意可知，$|PF_1|-|PF_2|=6<|F_1F_2|$，

所以，点 P 的轨迹是以 F_1、F_2 为焦点的双曲线的一支，B 对；

对于 C 选项，$|PF_1|+|PF_2|=8=|F_1F_2|$，所以，点 P 的轨迹为线段 F_1F_2，C 错；

对于 D 选项，设点 $P(x,y)$，则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=(x+4)^2+y^2+(x-4)^2+y^2=2x^2+2y^2+32=12$，

可得 $x^2 \quad y^2 \quad 10$，

满足条件的点 P 不存在，D 错.

故选：AB.

10．BC

【分析】令 $n=1$ 时，由 S_n, a_n 求出 a_1 可判断 A；由 $a_n \quad 4n \quad 25$ 知，$a_6 \quad 0, a_7 \quad 0$，当 $n=6$ 时，S_n 取得的最小值可判断 B；若 $a_n \quad 4n \quad 3$，求出数列 $\quad 1^n a_n$ 的前17项和可判断 C；由数列的下标和性质可得 $a_{1011} \quad a_{1012} \quad a_1 \quad a_{2022} \quad 0, a_{1000} \quad a_{1024} \quad a_1 \quad a_{2023} \quad 0$，则 $S_{2022} \quad 0, S_{2023} \quad 0$ 可判断 D.

【详解】对于 A，由 $S_n \quad 2n^2 \quad 6n \quad 1$，当 $n=1$ 时，$a_1 \quad S_1 \quad 3$，

由 $a_n \quad 4n \quad 4$，当 $n=1$ 时，$a_1=0$，所以 A 不正确；

对于 B，若 $a_n \quad 4n \quad 25$，当 $n=1$ 时，$a_1 \quad 21$，则 $a_6 \quad 0, a_7 \quad 0$，

所以当 $n=6$ 时，S_n 取得的最小值为 $S_6 \quad \frac{6 \quad a_1 \quad a_6}{2} \quad 3 \quad 21 \quad 1 \quad 66$；

对于 C，若 $a_n \quad 4n \quad 3$，设数列 $\quad 1^n a_n$ 的前 n 项和为 T_n，

所以 $T_{17} \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_{16} \quad a_{17}$

$1 \quad 5 \quad 9 \quad 13 \quad 61 \quad 65 \quad 4 \quad 8 \quad 65 \quad 33$，故 C 正确；

对于 D，数列 a_n 为等差数列，且 $a_{1011} \quad a_{1012} \quad 0, a_{1000} \quad a_{1024} \quad 0$，

则 $a_{1011} \quad a_{1012} \quad a_1 \quad a_{2022} \quad 0, a_{1000} \quad a_{1024} \quad a_1 \quad a_{2023} \quad 0$，

所以 $S_{2022} \quad \frac{2022 \quad a_1 \quad a_{2022}}{2} \quad 0, S_{2023} \quad \frac{2023 \quad a_1 \quad a_{2023}}{2} \quad 0$，

当 $S_n \quad 0$ 时，n 的最大值为2022，所以 D 不正确.

故选：BC.

11．AC

【分析】利用导数研究函数的单调性一一判定选项即可.

【详解】由 $f \quad x \quad e^x \quad x \quad f \quad x \quad e^x \quad 1 \quad 0$，$f \quad x$ 在 R 上是增函数，故 A 正确；

对于函数 $f \quad x \quad xe^x \quad f \quad x \quad x \quad 1 \quad e^x$，当 $x \quad 1$ 时，$f \quad x \quad 0$，当 $x \quad 1$ 时，$f¢(x) > 0$，