

江苏省南京市南京师大附中 2023-2024 学年高一上学期期

末数学试题

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、单选题

1. 集合 $A = \left\{x \mid -2 < x < \frac{7}{3}\right\}$, 集合 $B = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-2, 0, 2\}$ B. $\{-2, 0, 2, 4\}$ C. $\{0, 2, 4\}$ D. $\{0, 2\}$

2. 已知角 α 的终边过点 $P(3a, -4a)$, 其中 $a > 0$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $-\frac{7}{5}$

3. 设点 O 是正三角形 ABC 的中心, 则向量 \overrightarrow{AO} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} 是 ()

- A. 共起点的向量 B. 模相等的向量 C. 共线向量 D. 相等向量

4. 若 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) =$ ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都有

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, $f(-1) = 0$, 则不等式 $xf(x) < 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-1, 1)$

6. 设 a 为实数, 则关于 x 的不等式 $(ax - 2)(2x - 4) < 0$ 的解集不可能是 ()

- A. $\left(\frac{2}{a}, 2\right)$ B. $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$

C. $(2, +\infty)$

D. $\left(2, \frac{2}{a}\right)$

7. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = -\frac{1}{4} \sin \pi x$.

若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则实数 m 的最大值为 ()

A. $\frac{9}{4}$

B. $\frac{7}{3}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{8}{3}$

8. 已知常数 $\omega \geq 0$, 函数 $f(x) = \sin \omega x$ 在区间 $\left[\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right]$ 上单调, 则 ω 不可能等于

()

A. $\frac{8}{3}$

B. 2

C. $\frac{8}{5}$

D. $\frac{4}{3}$

二、多选题

9. 若函数 $f(x)$ 满足: ①对定义域内的任意 x_1, x_2 , 都有 $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 x_2)$; ②

当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 则称 $f(x)$ 为“N函数”. 下列函数是“N函数”的是 ()

A. $f(x) = 2^x$

B. $f(x) = \ln x$

C. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

D. $f(x) = \log_2 x$

10. 已知函数 $f(x) = 2 \cos(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 满足 $f(x) + f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$, 则 ()

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称

C. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right]$ 上单调递增

D. $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有两个零点

11. 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, 有 $f(x+1) = -f(x)$, 且当 $x \in [0, 1)$

时, $f(x) = \log_2(x+1)$. 下列命题正确的是 ()

- A. $f(2023) + f(-2024) = 0$ B. $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数
- C. 直线 $y = x$ 与 $f(x)$ 的图象有且仅有 2 个交点 D. $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$

12. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是定义域为区间 D 的函数, 若存在 $k > 0$, 使得对任意 $x_1, x_2 \in D$,

都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|g(x_1) - g(x_2)|$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 D 上相对于 $g(x)$ 满足 k^* 条件. 下

列命题正确的是 ()

- A. 若 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$, $f(x)$ 在区间 $[2, 4]$ 上相对于 $g(x)$ 满足 k^* 条件, 则 k 的

最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

- B. 若 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上相对于 $g(x)$ 满足 2^* 条件

- C. 设 a 为实数, 若 $f(x) = ax^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上相对于 $g(x)$ 满足 4^*

条件, 则 a 的最大值为 $\frac{2}{27}$

- D. 若 $f(x) = x$, $g(x) = \log_3(9^x + 1)$, $f(x)$ 在 D 上相对于 $g(x)$ 满足 1^* 条件, 则 $D \subseteq (-\infty, 0]$

三、填空题

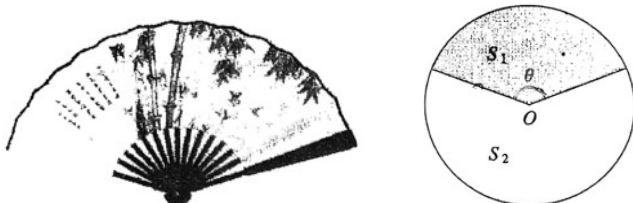
13. $\log_{\frac{1}{16}} 8 + \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}} + 2024^0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. “数摺聚清风, 一捻生秋意”是宋代朱翌描写折扇的诗句. 一般情况下, 折扇可看

作是从一个圆面中剪下的扇形制作而成. 如图, 设扇形的面积为 S_1 , 其圆心角为 θ , 圆

面中剩余部分的面积为 S_2 ，当 S_1 与 S_2 的比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，扇面为“美观扇面”. 若扇面

为“美观扇面”，扇形的半径 $R = 20\text{cm}$ ，则此时的扇形面积为_____ cm^2 .



15. 若 a, b, c 均为正数，且 $a+b+c=3$ ，则 $\frac{1}{2a+1} + \frac{2}{b+c}$ 的最小值是_____.

16. 设 a 为实数，若实数 x_0 是关于 x 的方程 $e^x + (1-a)x = \ln a + \ln x$ 的解，则 $\frac{e^{x_0-1}}{ax_0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题

17. 已知集合 $A = \{x | (x-a-1)(x-2a+3) < 0\}$ ，集合 $B = \left\{x \mid \frac{2x}{4-x} \geq 0\right\}$.

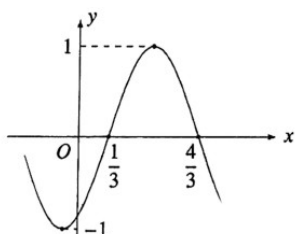
(1) 当 $a=2$ 时，求 $A \cap B$ ；

(2) 若 $A \cap B = A$ ，求实数 a 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示. 若

将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的纵坐标不变, 横坐标变为原来的 2 倍, 则所得图象为函

数 $g(x)$ 的图象.



(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x \in [0, 2]$ 时, 求 $g(x)$ 的单调递减区间.

19. 已知函数 $f(x) = x|x|$, 函数 $g(x) = x^2 - 2x - m$.

(1) 求不等式 $f(x^3 - 2) > -1$ 的解集;

(2) 如果对于任意 $x_2 \in [-1, 2]$, 都存在 $x_1 \in [-2, 1]$, 使得 $g(x_2) = f(x_1)$, 求实数 m 的取值范围.

20. 中国政府在第七十五届联合国大会上提出：“中国将努力争取在 2060 年前实现碳中和。”随后，国务院印发了《关于加快建立健全绿色低碳循环发展经济体系的指导意见》.某企业去年消耗电费 50 万元，预计今年若不作任何改变，则今年消耗电费与去年相同.为了响应号召，节能减排，该企业决定安装一个可使用 20 年的太阳能供电设备，并接入本企业的电网.安装这种供电设备的费用（单位：万元）与太阳能电池板的面积（单位： m^2 ）成正比，比例系数约为 0.6.为了保证正常用电，安装后采用太阳能和电能互补供电的模式.设在此模式下，安装太阳能供电设备后该企业每年消耗的电费 C （单位：万元）与安装的这种太阳能电池板的面积 x （单位： m^2 ）之间的函数关系是

$$C(x) = \frac{k}{10x+60} \quad (x \geq 0, k \text{ 为常数}).$$

记该企业安装这种太阳能供电设备的费用与 20 年

所消耗的电费之和为 y （单位：万元）.

(1)求常数 k ，并写出 y 关于 x 的函数关系式；

(2)当太阳能电池板的面积为多少平方米时， y 取得最小值？最小值是多少万元？

21. 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) + ax$ 是偶函数.

(1) 求实数 a 的值:

(2) 若函数 $g(x) = 2^{2x} + 2^{-2x} + m \cdot 2^{f(x)}$ 的最小值为 -4 , 求实数 m 的值.

22. 设 a 为常数, 函数 $f(x) = 2 \cos^2 x - a \sin x - 1$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的值域:

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的零点的个数:

(3) 设 n 为正整数, $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上恰有 2024 个零点, 求所有可能的正整数 n 的值.

参考答案:

1. D

【分析】由交集的定义直接求解.

【详解】集合 $A = \left\{x \mid -2 < x < \frac{7}{3}\right\}$, 集合 $B = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B = \{0, 2\}$.

故选: D

2. C

【分析】由三角函数的定义直接求解.

【详解】角 α 的终边过点 $P(3a, -4a)$, 其中 $a > 0$, 则点 P 到原点的距离

$$r = \sqrt{(3a)^2 + (-4a)^2} = 5a,$$

$$\text{所以 } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{-4a}{5a} + \frac{3a}{5a} = -\frac{1}{5}.$$

故选: C

3. B

【分析】利用平面向量的相关概念判断.

【详解】因为点 O 是正三角形 ABC 的中心,

所以 \overrightarrow{AO} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} 是模相等的向量;

向量只有大小与方向两个要素, 没有起点之说;

这三个向量方向不同, 不是共线向量;

这三个向量方向不同, 不是相等向量.

故选: B

4. A

【分析】利用三角函数的诱导公式求解.

【详解】解: 因为 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$,

所以 $\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{3}$,

故选：A

5. A

【分析】判断出函数在 $(-\infty, 0)$ 上的单调性以及函数值正负情况，结合奇偶性，可判断函数

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性，以及函数值的正负情况，由此可得不等式的解集.

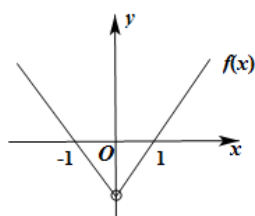
【详解】由题意知对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ， $f(-1) = 0$ ，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，且当 $x < -1$ 时， $f(x) > 0$ ；当 $-1 < x < 0$ 时， $f(x) < 0$ ；

又 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增， $f(1) = 0$ ，

且当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) < 0$ ；当 $x > 1$ 时， $f(x) > 0$ ；

不妨画出 $f(x)$ 图象示意图如图：



则不等式 $xf(x) < 0$ 的解集是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ ，

故选：A

6. B

【分析】分类讨论解不等式 $(ax - 2)(2x - 4) < 0$ ，判断不可能的解集.

【详解】关于 x 的不等式 $(ax - 2)(2x - 4) < 0$ ，

若 $a = 0$ ，不等式为 $-2(2x - 4) < 0$ ，解得 $x > 2$ ，此时解集为 $(2, +\infty)$ ；

若 $a \neq 0$ ，方程 $(ax-2)(2x-4)=0$ ，解得 $x=\frac{2}{a}$ 或 $x=2$ ，

$a < 0$ 时，不等式 $(ax-2)(2x-4) < 0$ 解得 $x < \frac{2}{a}$ 或 $x > 2$ ，此时解集为 $(-\infty, \frac{2}{a}) \cup (2, +\infty)$ ；

$0 < a < 1$ 时， $\frac{2}{a} > 2$ ，不等式 $(ax-2)(2x-4) < 0$ 解得 $2 < x < \frac{2}{a}$ ，此时解集为 $(2, \frac{2}{a})$ ；

$a = 1$ 时， $\frac{2}{a} = 2$ ，不等式 $(ax-2)(2x-4) < 0$ 解集为 \emptyset ，

$a > 1$ 时， $\frac{2}{a} < 2$ ，不等式 $(ax-2)(2x-4) < 0$ 解得 $\frac{2}{a} < x < 2$ ，此时解集为 $(\frac{2}{a}, 2)$ ；

所以不等式 $(ax-2)(2x-4) < 0$ 的解集不可能是 $(-\infty, 2) \cup (\frac{2}{a}, +\infty)$ 。

故选：B

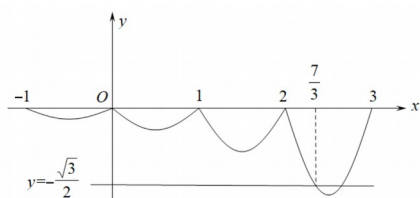
7. B

【分析】根据已知利用正弦函数图象与性质、函数的周期性，结合函数图象进行求解即可。

【详解】当 $x \in (0, 1]$ 时， $f(x) = -\frac{1}{4} \sin \pi x$ ，

且定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 的大致图象为



因为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4}$ ， $f(x+1) = 2f(x)$ ，

$$\text{所以 } f\left(\frac{3}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} > -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = 2f\left(\frac{3}{2}\right) = -1 < -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以由 } f(x+2) = 2f(x+1) = 4f(x) = 4\left(-\frac{1}{4}\sin\pi x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 可得 } x = \frac{1}{3},$$

$$\text{当 } x \leq \frac{3}{2} \text{ 时, 由 } f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 的 } x = \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{7}{3},$$

$$\text{所以对任意 } x \in (-\infty, m], \text{ 都有 } f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{得实数 } m \text{ 的取值范围为 } \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right], \text{ 则实数 } m \text{ 的最大值为 } -\frac{7}{3}.$$

故选: B.

8. C

【分析】根据正弦函数的单调性, 由 $f(x)$ 的单调区间得 ω 的取值范围, 验证各选项中的值.

$$\text{【详解】常数 } \omega \geq 0, \text{ 当 } x \in \left[\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right], \text{ 有 } \omega x \in \left[\frac{4\omega}{3}\pi, \frac{5\omega}{3}\pi\right],$$

$$\text{正弦函数的单调区间为 } \left[\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{函数 } f(x) = \sin \omega x \text{ 在区间 } \left[\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right] \text{ 上单调,}$$

$$\text{则有 } \begin{cases} \frac{(2k-1)\pi}{2} \leq \frac{4\omega}{3}\pi \\ \frac{(2k+1)\pi}{2} \geq \frac{5\omega}{3}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}), \text{ 解得 } \frac{3(2k-1)}{8} \leq \omega \leq \frac{3(2k+1)}{10}, (k \in \mathbb{Z}),$$

$$k=2 \text{ 时, } \frac{9}{8} \leq \omega \leq \frac{3}{2}, \quad \omega = \frac{4}{3} \text{ 满足:}$$

$k=3$ 时, $\frac{15}{8} \leq \omega \leq \frac{21}{10}$, $\omega=2$ 满足;

$k=4$ 时, $\frac{21}{8} \leq \omega \leq \frac{27}{10}$, $\omega=\frac{8}{3}$ 满足;

不等式 $\frac{3(2k-1)}{8} \leq \frac{8}{5} \leq \frac{3(2k+1)}{10}$, 解得 $\frac{13}{6} \leq k \leq \frac{79}{30}$, 因为 $k \in \mathbb{Z}$, 则 k 无解,

则 $\omega=\frac{8}{5}$ 时, 函数 $f(x)=\sin \omega x$ 在区间 $\left[\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right]$ 不单调;

故选: C

【点睛】方法点睛:

依题意有 $\omega x \in \left[\frac{4\omega}{3}\pi, \frac{5\omega}{3}\pi\right]$, 区间包含于正弦函数的单调区间, 可求出 ω 的取值范围.

9. BD

【分析】根据“ \mathbb{N} 函数”的定义, 逐项验证即可求解.

【详解】对 A: 由 $f(x)=2^x$, 对定义域内的任意 x_1, x_2 ,

$f(x_1)+f(x_2)=2^{x_1}+2^{x_2} \neq f(x_1x_2)=2^{x_1x_2}$ 不满足条件①, 故 A 错误;

对 B: 由 $f(x)=\ln x$, 对定义域内的任意 x_1, x_2 ,

$f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1+\ln x_2=\ln x_1x_2=f(x_1x_2)=\ln x_1x_2$, 满足条件①,

当 $x>1$ 时, 因 $f(x)=\ln x$ 在其定义域上是增函数, 所以 $f(x)>f(1)=\ln 1=0$, 满足条件②,

故 B 正确.

对 C: 由 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, 对定义域内的任意 x_1, x_2 ,

$$f(x_1) + f(x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \neq f(x_1 x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1 x_2},$$

不满足条件①，故 C 错误；

对 D：由 $f(x) = \log_2 x$ ，对定义域内的任意 x_1, x_2 ，

$$f(x_1) + f(x_2) = \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = \log_2 x_1 x_2 = f(x_1 x_2) = \log_2 x_1 x_2, \text{ 满足条件①,}$$

当 $x > 1$ 时，因 $f(x) = \log_2 x$ 在其定义域上是增函数，所以 $f(x) > f(1) = \log_2 1 = 0$ ，满足条

件②，故 D 正确.

故选：BD.

10. BD

【分析】根据 $f(x)$ 满足 $f(x) + f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ ，得到 $f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称，从而求得

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \text{ 然后逐项判断.}$$

【详解】解：因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ ，

所以 $f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称，

所以 $f\left(\frac{\pi\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi\pi}{3} + \varphi\right) = 0$ ，则 $\frac{\pi\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，即 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

则 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，故 A 错误；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/548057125103006030>