专项训练六　圆中的证明与计算

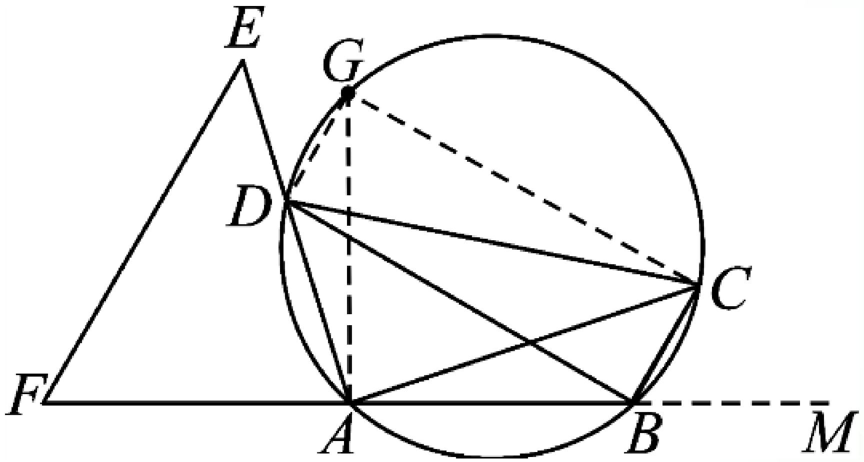
类型一：与圆的性质有关的证明与计算

1.(2024·浙江改编)如图,在圆内接四边形ABCD中,$AD < AC$,$\angle ADC < \angle BAD$,延长AD至点E,使$AE = AC$,延长BA至点F,连接EF,使$\angle AFE = \angle ADC$.

(1)若$\angle AFE = 60°$,CD为直径,求$\angle ABD$的度数;

(2)①延长AB至点M,求证:$EF \parallel BC$;

②过点D作$DG \parallel BC$交⊙O于点G,连接AG,CG,求证:$EF = BD$.



(1)解：$\because$ CD为直径，$\therefore \angle CAD = 90°$,

$\because \angle AFE = \angle ADC = 60°$,

$\therefore \angle ACD = 90° - 60° = 30°$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACD = 30°$.

(2)证明：①∵四边形ABCD是圆内接四边形,

∴$\angle CBM=\angle ADC$,

又∵$\angle AFE=\angle ADC$,∴$\angle AFE=\angle CBM$,

∴$EF\parallel BC$.

②由题意得DG // BC // EF,

∴ $\angle GDC = \angle DCB$, ∴ $\widehat{BD} = \widehat{CG}$, ∴ BD = CG,

∵四边形ACGD是圆内接四边形,

∴ $\angle GDE = \angle ACG$, 又∵DG // EF,

∴ $\angle E = \angle GDE$, ∴ $\angle E = \angle ACG$,

∵ $\angle AFE = \angle ADC$, $\angle ADC = \angle AGC$,

∴ $\angle AFE = \angle AGC$,

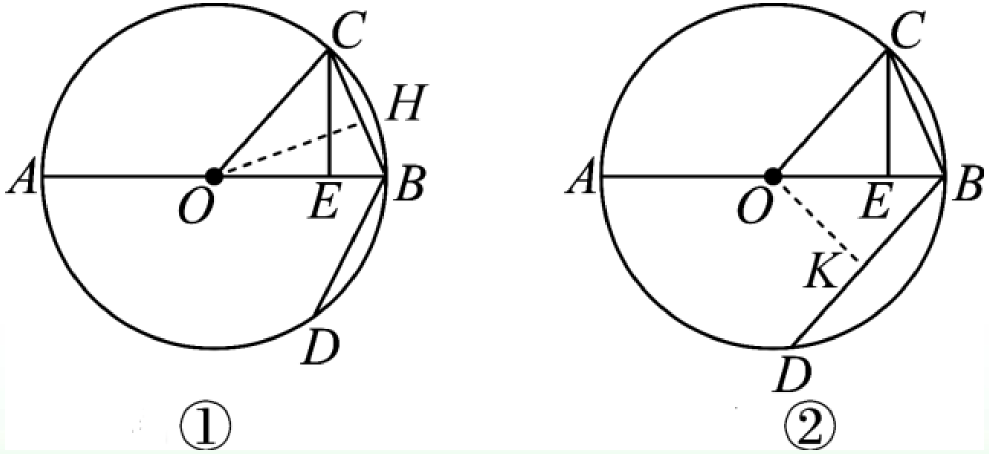
∵AE = AC, ∴ $\triangle AEF \cong \triangle ACG$(AAS),

∴EF = CG, ∴EF = BD.

2．(2024·包头改编)如图，AB是⊙O的直径，BC，BD是⊙O的两条弦，点C与点D在AB的两侧，E是OB上一点($OE > BE$)，连接OC，CE，且$\angle BOC = 2\angle BCE$.

(1)如图①，若$BE = 1$，$CE = \sqrt{5}$，过点O作$OH \perp BC$于点H.求⊙O的半径；

(2)如图②，过点O作$OK \perp BD$于点K，若$BD = 2OE$，求证：$BD \parallel OC$.(请用两种证法解答)



(1)解：∵OC＝OB，OH⊥BC，

∴∠COH＝∠BOH，CH＝BH，

∵∠BOC＝2∠BCE，∴∠BOH＝∠BCE，

∵∠BOH＋∠OBH＝90°，

∴∠BCE＋∠OBH＝90°，∴∠CEB＝90°，

∴BC＝$\sqrt{EC^2+EB^2}=\sqrt{6}$，∴CH＝BH＝$\frac{\sqrt{6}}{2}$，

∵cos∠OBH＝$\frac{BH}{OB}=\frac{EB}{BC}$，∴OB＝$\frac{BH\cdot BC}{BE}$＝3.

∴⊙O的半径为3.

(2)证法一：由题意得

BK＝DK，∵BD＝2OE，∴OE＝BK，

∵∠CEO＝∠OKB＝90°，OC＝OB，

∴Rt△OEC≌Rt△BKO(HL)，

∴∠COE＝∠OBK，∴OC∥BD.

证法二：由题意得BK＝DK，∵BD＝2OE，

∴OE＝BK，∵$\cos\angle COE=\frac{OE}{OC}$，

$\cos\angle OBK=\frac{BK}{OB}$，OC＝OB，

∴cos∠COE＝cos∠OBK，

∴∠COE＝∠OBK，∴OC∥BD.

类型二：与切线判定有关的证明与计算

3．(2024·湖北)如图，在Rt△ABC中，∠ACB＝90°，点E在AC上，以CE为直径的⊙O经过AB上的点D，与OB交于点F，且BD＝BC.

(1)求证：AB是⊙O的切线；

(2)若AD＝$\sqrt{3}$，AE＝1，求$\overset{\frown}{CF}$的长.