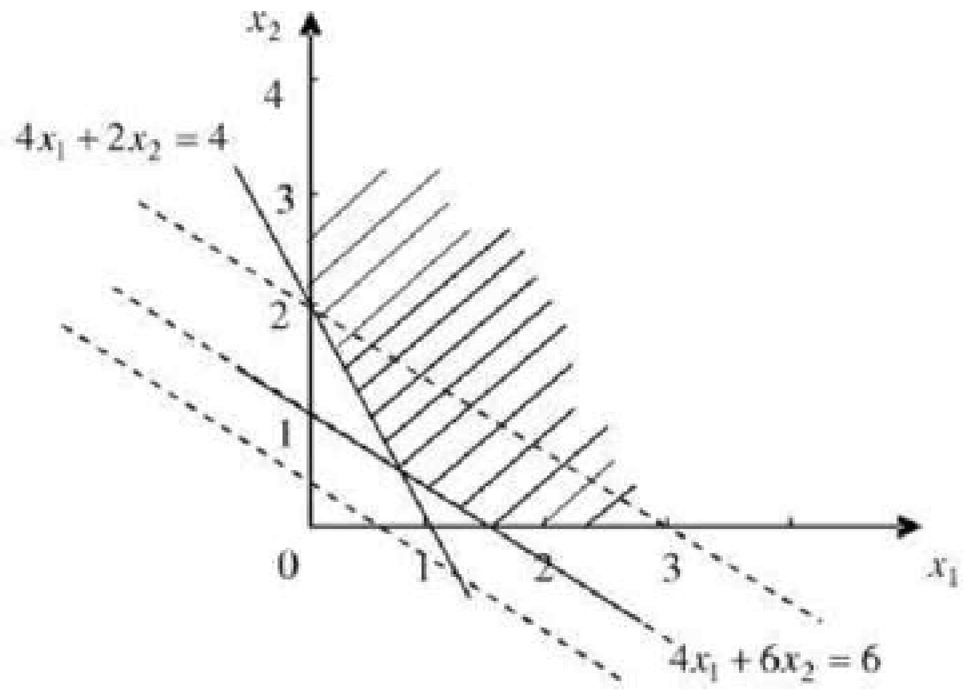
运筹学基础及丨、V:用 习 题 解 答

习题一 P46

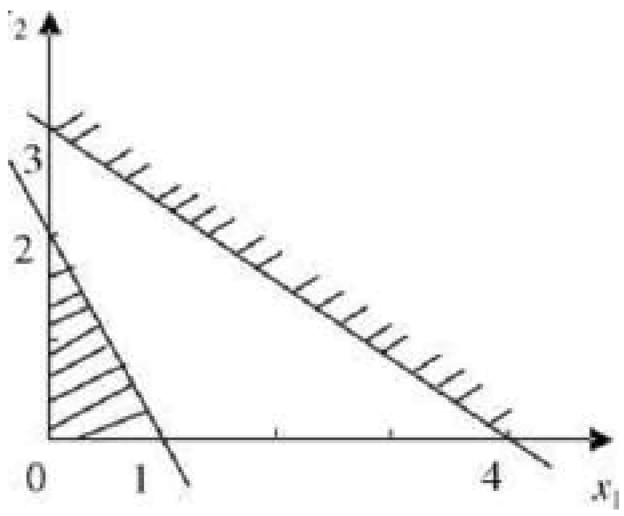
1.1

(a)



该问题有无穷多最优解，即满足$4x_1+6x_2=6$且$0\le x_2\le\frac{1}{2}$的所有(x_1,x_2)，此时目标函数值

2 = 3。 (b)



用亂解法找+ 到满足所打约束条仲的公：it茫 W，所以该问题无可行解。

1.2

(a) 约束方程组的系数矩阵

A =

M2 3	6 3	0	0
8 1	-4 0	2	0
13 0	0 0	0	- b

基			基解						是否基可行解	目标函数值
			A	入 ‘2	太 3	ˆ4	入 *5	太 6		
P	Pi	Ih	0	] 6 T	7 □ 6	0	0	0	否	
P	Pi	P_A	0	1 0	0	7	0	0	是	10
P	P2	Ps	0	3	0	0	7 2	0	是	3

	1 -4 4 0 0 0 21 T	否	
P3 P_A	0 0 5 2 8 0 0		
	0 0 3 0 8 0 2	是	3
	1 0 -i 0 0 3 2	否	
P_A P_S	0 0 0 3 5 0		0
P_A Pe	1 0 4 0 -2 0 15 T	否	

最优解 A = (o, iao,7, o, o)r

(b) 约束方程组的系数矩阵 f I 2 3 4 、
4 = l2 2 I 2,

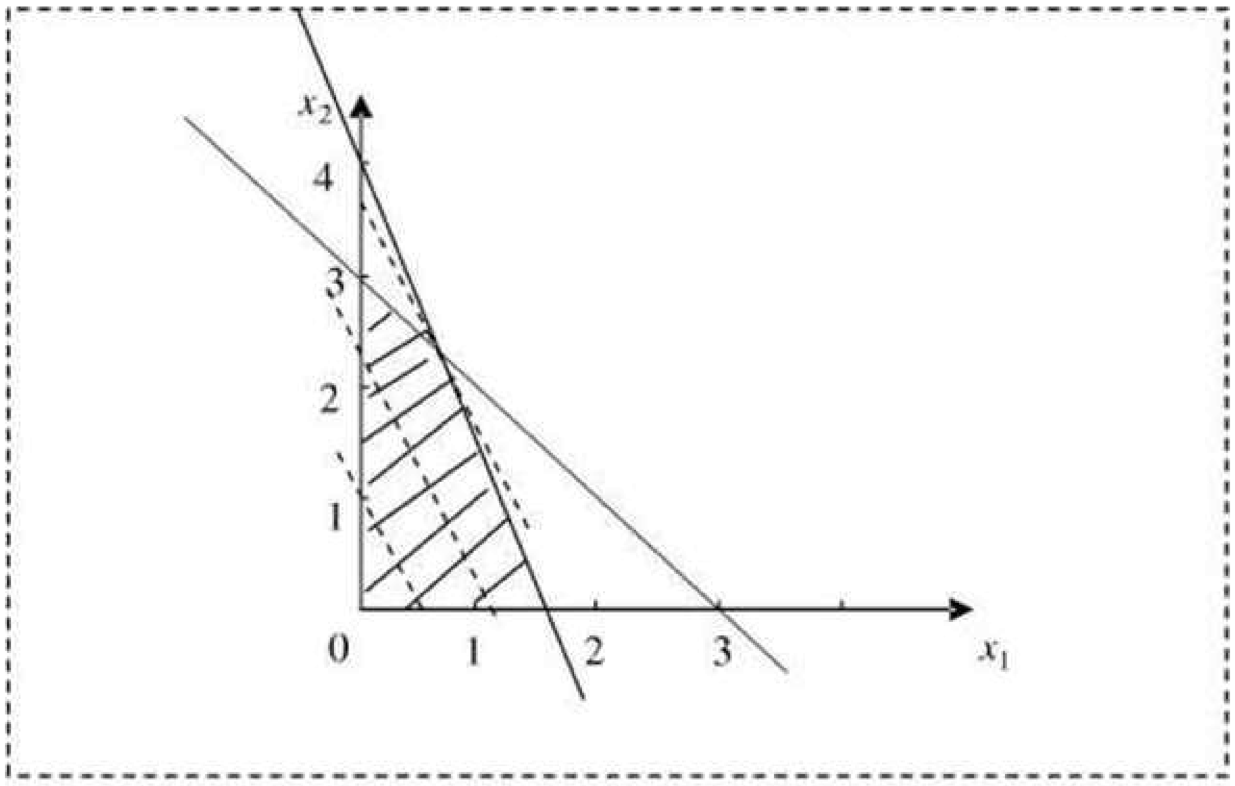
基	基解 $_2x_3x_4$	是否基可行解	目标函数值
	- 4 — 0 0 2	否	
Pi P3	1 o i i 0 5 5	是	4 3 T
P_A	- i 0 o H 3 6	否	
P_I Pi	0 - 2 0 2	是	5
	0 - - 0 2 2	否	5
Pi P_A P3 !U	(J 0 | 1	是	

最优解 1 = (ˆ,Q 11 , 0ˆ V5

1. 3

(a)

(1) 图 解 法



最优解即为$\begin{cases}3x_1+4x_2=9\\5x_1+2x_2=8\end{cases}$的解 $x=\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，最大值 $z=\dfrac{35}{2}$

(2)单纯形法

首先在各约束条件上添加松弛变砿，将问题转化为标准形式

max z = 10a -, +5a' $_2$ +0x $_3$ +0a $_4$

[3a-. +4 义2 + A3 = 9 si.

<

[5a -j + 2X_2 + a' $_4$ = 8

则 A，P_4组成个猫《=令 A = ;c $_2$ = 0

得-站可行解 a_ = (0.0.9,8) ，山此列出初始单纯形表

cr $_2$ >0， 0－minj 2A

新的单纯形农为 A', Xo X_A

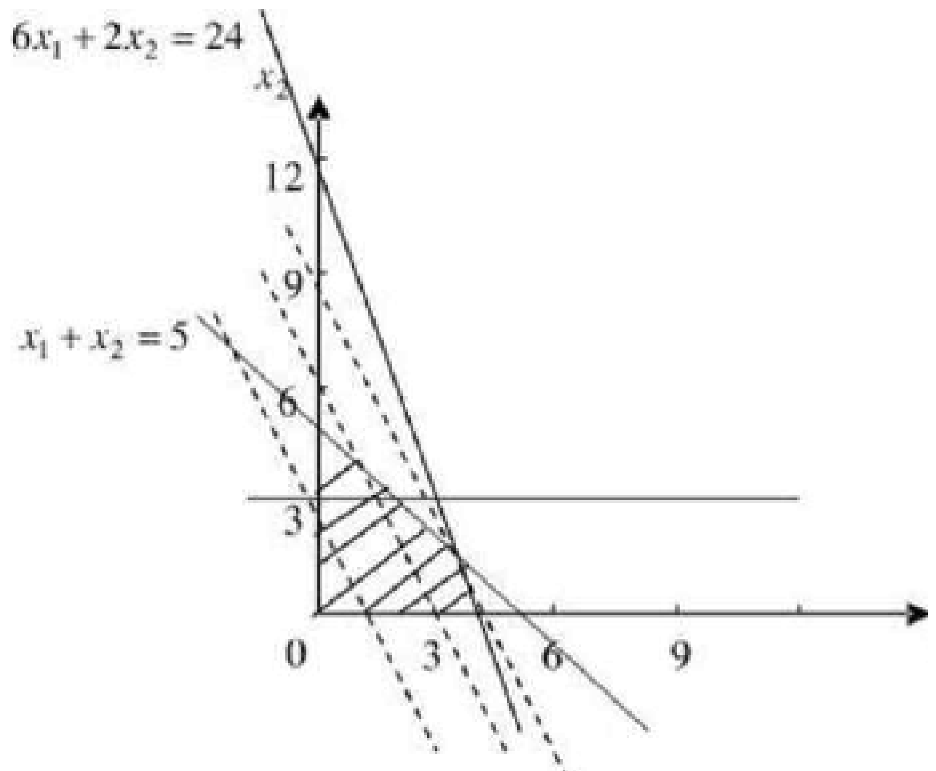
x2 14 14

M ~T? 5 25

q.qcO，表明已找到问题埮优解. xi =~， a- $_3$ =0, a $_4$

(b)

(1) 图解法



17

最优解即为严+ 2X2= 2 4 的解 x = 卩, 2 V 最大值 z : I
X y = 5 I 2 2 /

(2) 单纯形法

茼先在外约束条件.h 添加松弛变 M 将问题转化为标准形式 max Z

= 2.v, + x_2 + Ox $_3$ + 0.v $_4$ + Oa $_5$ 5a' $_2$ + = 15 6.y, + 2x $_2$ + .v $_4$ = 24

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	[6]	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

$\sigma_1 > \sigma_2$。 $\theta = \min\left(-, \frac{24}{6}, \frac{5}{1}\right) = 4$

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_4	4	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0
0	x_5	1	0	$\left[\frac{2}{3}\right]$	0	$-\frac{1}{6}$	1
$c_j - z_j$			0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0

$\sigma_2 > 0$， $\theta = \min\left(\frac{15}{5}, 24, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

2 *ˆ4 0 0

o A： 5 0 --

—Q 0 一 4

(7,ˆ2 <0,表明已找到问题最优解ˆ =1，X_2=- , A- 3 2 15 L a 4 = 0, x_5 最大

佳□ 17
Hi Z =—— 2

1.6

(a) 在约束条件中添加松弛变量或剩余变量，且令 k = jc_2 -a：； (a* 2 > 0,.v； > o)

Xx =
~X->
该问题转化为

max z' = -3a, - x_2 + .v 2 - 2a 3 + 0.v 4 + (Xv 5 2x | + 3a ⁻2 - 3a 2

+ 4a 3 +a 4 =12
攀 M I

SS + x_2 -A*2 -2a*3, —ˆ5 =8 3a*, -x_2 + x_2 — 3a*3 = 6
A*,A 2X 2 x 3 A- 4 A3 0

-K 约束系数矩障为

2 3-34I04 | - 1 - 2

0 - 1

3 - | | — 3 0 0

在 A 中人为地添加两列单位向虽/> 7,

2 3 -3 4 1 0 0 0 4 | -1 -2 t) -1 | 03-1 I -3

0 0 0 1

令 max z'= -3a ⁻i - x_2 +x_2 − 2.v 3 + Oa:., + 0.v 5 − Mx_6 - Mx_7 得初始单纯形表

$c_j \rightarrow$				-2 0 0	M -M
c_B	基	b	ˆ Xi x_2	x_4 x_5 x_6	
0	x_4	12	4 1	0	0 0
−M	x_6	8		-I	
−M	x_7	6		0 0 0	

-3 + 7M -J 1 -2-5M 0 -M 0 0

(b) 在约束条件中添加

松弛变 M 或剩余变 M，.R 令 a: 3 (jc 3>0,.x ；>0)

该问题转化为

max z □ = — 3^ - 5.v 2 + x ?- x ? +

0,v 4 + Ox5 x, + 2x2 + x^- x^-x4 =6 2.v, + x 2

- 3jc 3 − 3: 3 + a*5 = 16x2+ 5 a* 3 — 5a* 3

= 10 •v p A: 2, “x 4, A5

ˆ0

艽约束系数矩阵 -I 为

0

2

1 3 − 3 0 − 1

1 1 5 − 5 0

0

v /

ft A 中人为地添加两列单位向觉 p7，

1 2 1 1 − 1 0 1 0 、

2 1 3 − 3 0 1 0 0 1 1 5 − 5 0 0 0 1

、/

令 max z, = -3a*, — 5,v 2 + .v 3 — x3 + 0x4 + 0xs — Mxb - Mx 1

衍初始单纯形表

0 0 -M - M −5

X. X, X, X, X, X, X, x n

-A/ x6

16

-M x7 10

-3 + 2A/ 5 + 3M 1+6M -1-6M -M 0 0 0

(a) 解 1: 大 法

在上述线性规划问题中分别减去剩余变萤 x4，x6,□再加上人工变蛩 15，17 ',

得 $\max\ z = 2x_t - x_2 + 2x_3 + 0,v_4 - Mx_s + 0,v_6 - Mx_7 + 0a_8 - Mx^\wedge$

A', + X $_2$ + A : $_3$ - + JC $_5$ = 6 3 + 7M -J 1 -2-5M 0 -M 0 0

-2x $_1$ + jc $_3$ — a* $_6$ + x $_1$ —2 2x $_z$ — jc $_3$ a* $_8$

+ jc $_9$ =0

r,

a-,,.v $_2$,a* $_3$,j: $_4$,a: $_5$, ^ $_6$,x $_7$,x $_8$,a- $_9$ >0

其中 MS 个任意人的正数-据此可列出单纯形表

2 2 M M M

jc, x $_2$ x $_4$ x5 x6 A

-M x $_s$ 6 -M 0 0 0

x $_7$ 2 —M 0 0 [2]

a、0 0

2-M 3A/-1 2 + A/ -M 0 M 0

x $_s$

-M x, [1] 1/2 1/2 0 0

—I 1/2 1/2 1/2

0

2-M 0 ----- + ^ 5M 3 ,, ^ — - M 0 -M 0 ------------------ ,, A/ I 1 3A/ 2 2 2 2 2 2

-M jr $_5$ 3 0 0 0 1 1 3/2 -3/2 1/2 -1/2 3/4

2 .v $_3$ 2-I x $_2$ 0 0 - 1 1 0 0

I 0 -1/2 1/2 -1/2 1/2

4Af+5 0 ■M ?>M +3 -5M -3 M -3M

2 2 2

x, 3/4 A $_3$ 0 0 -1/4 1/4 3/8 -3/8 1/8 -1/8

7/2 7/4 0 1 -1/2 1/2 -1/4 1/4 1/4 1/4

0 -1/4 1/4 1/8 1/8 3/8 3/8

-5/4 -M 5/4 3/8 3 -8 3/8 9 9 8 8

山单纯形表计算结果可以 ft 出，ct $_4$ >0 且% <0(/ = | ，2，3)，所以该线性规划问题有无界解 解 2:

两阶段法。

现在.卜.述线性规划问题的约束条件 『I *分别减去剩余变觉， x(,a $_8$，再加上人 | :变鼠

x^x^x^nm □阶段的数学模型

据此可列出单纯形表

0

x1 尤4 A 尤6 A

久5 1 0 — 1 0 0 0 0 0 6

X7 [2] 1 0 0 -1 0

0 0

义.5 0 3/2 -1 1 1/2 1/2 0 0

A⁻7 0 [ ] 0 0 1/2 1/2

/2 0

-5/2 0

0 0 0 1 I 0 3/2 -3/2 1/2 -1/2 -I 3/4

0 0 0 1/2 1/2 1/2 1/2

0

0

X, 3/4 I 0 0 -1/4 1/4 3/8 -3/8 1/8 -1/8

A⁻3 0 0 1 -1/2 1/2 -1/4 1/4 1/4 1/4

7/2 x_2 0 -1/4 1/4 -1/8 1/8 -3/8 3/8

7/4 0 0

第阶段求得的最优解)ˆ=(ˆ0 0，0，0,0，0)'|:1 标函数的最优值 。

4 4 2

因人工变 jfU$_5$=x$_7$ =% =0，所以 A^(m，0,0，0，0,0，0)ᵀˆ原线性规划问题的骓可

行解。于是可以进行第阶段运算。将第-□阶段的最终表屮的人:丨:变獄取消,并填入原问题 的目标函数的系数，进行第二阶段的运算，见下表□

c_j_z_j	2	-1	2	0	0	0 0	
c_h ^ b		x_2	A	A		A	
2 xi 3/4	1	0	0	-1/4	3/8	-1/8	
2 A 7/2	0	0	1	-1/2	-1/4	1/4	
-1 x_2 7/4	0	1	0	-1/4	-1/8	-3/8	

现在上述线性规划问题的约束条件中分别减去剩余变觉 $_4$,;c $_5$,再加上人丨:变母 a- $_6$, a− $_7$, 得第

c_j-z_j	0	0	0	5/4	−3/8	−9/8

由表中计算结果可以看出，a $_4$ > 0 P l□< 0 (/ = 1，2，3)，所以原线性.规划问题苻无界解。(b)

解 1：大 M 法

在上述线性规划问题中分别减去剩余变虽 x $_4$,;r $_6$, A，再加上人丨 :变 6Lr $_5$ 4 $_7$ ，得min z=2jc,+ 3x $_2$ +a* $_3$

+0.v $_4$ +0a* $_5$ + Mx $_b$ - Mx $_n$

jc,+4a* $_2$ +2jc $_3$ 一x $_4$ +=3a*,+ 2x $_2$ -

x $_s$ + x $_7$ = 6

A|，-'2，-'3，-ˆ4，□5ˆ,，-'8>-^*y —

其中 M是个任意大的正数。据此可列出单纯形表

■ M — M

c# 基办

M x 6

8 [4J

M x $_7$ 6

2-AM 3-6M I-2M M

1/2 −1/4 1/4

$_2$M x $_n$ [5/2] 0 1/2 _1/2

-M 0 M 3 M 3M Y

3/5 −3/10 1/10 3/10 一 1/10

x $_2$ 9/5 −2/5 1/5 −2/5 −1/5 2/5

a:, 4/5 1/2 1/2 M-M2 Af-1/2

山单纯形表计算结果可以 fhh. 最优解欠*(|,|，0，0,0，0，0/，1=1 标函数的垴优解值

z*= 2 x l + 3x| = 7。父存在非《变萤检验数 c r $_3$ = 0,故该线性规划问埋 Yf 无穷多鍛优解《 解

2 :两阶段法。

阶段的数学模耶 min 似：

4X2 +2x3 _a*4 +jc6 = 83.v,

+ 2X2 -x s +jc 7 =6

,v , , , A ”v5 , A , a. 7 , A ”v y >

0 据此可列出单纯形表

0

A2

A x6

xt> [4] 0 2

3

-4 -6 0

JV2 1/4 1 [5/2] 1/2 -1/4 1/4

ˆ7 0 -1 1/2 1/2 4/5

-5/2 1/2 3/2 0

2 9/5 3/5 -3/10 1/10 3/10 -1/10 -2/5 1/5

a*. 4/5 -2/5 -1/5 2/5

0 0

第阶段求得的最优解又ˆˆ…………别ˆ行标函数的最优值ˆ； =0。

丨入 1 人:1: 变跫 jc6=a> =0 ，所以（ H, 0, 0,0, O'O)1■[]足原线性规划问题的骓可行解。于足可以进行第：：阶段运算。将第[]阶段的最终表屮的人工变 M 取消，并填入原问题的 R 标函数的 系数，进行第.：阶段的运算，见下表。

crz)	2 3 1 0 0	0
cb b	A 又 4 义 s	

3 A−2 9/5 2 JC，4/5 现在上述线性规划问题的约束条件中分别减去剩余变觉 4,;c5,再加上人丨:变母a-6,a−7,得第	0 1 3/5 −3/10 1/10 1 0 −2/5 1/5 −2/5	
ci_h	0 0 0 1/2 1/2	

由单纯形表计算结果可以稽出，最优解；T=(|，|，0，0，0，0，0)T，R标函数的最优解值

ˆ=2x− + 3x− 7□山于存在非基变置检验数q =0，故该线性规划问题荷无穷多最优 5 5 3

解。

表 1-23

		A	文2	太3	文4	A
A_4	6	2	4	−2	1	0
久5 1		−13 2 0 1				
C广		3	−1	2	u	0

表 1-24

			Xl	丨3	文4	尤5
	3	1 2 −1 1/2 0				
久5 1		0	5	1	1/2	I
cJ- zi		0	−7	5	−3/2	0

1.10

		3	5	4	0	0	0
		xi	x2	a_3	a_4	丨5	x6
5 x_2	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0
0 a_5:	14/3	−4/3	0	[5]	−2/3	1	0
0 a_6:	29/3	5/3	0	4	−2/3	0	I
cj~zj		−1/3	0	4	−5/3	0	0

		-^i	尤2	人.3	又.4	丨5	又.6
5 x_2	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0
4 a-3	14/15	−4/15	0	1	−2/15	1/5	0