专题08 幂函数与二次函数

【考点预料】

1、幂函数的定义

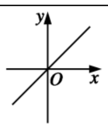
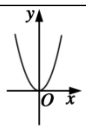
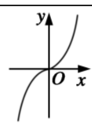
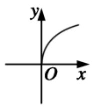
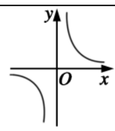
一般地，$y=x^{a}(a\in R)$（a为有理数）的函数，即以底数为自变量，幂为因变量，指数为常数的函数称为幂函数.

2、幂函数的特征：同时满意一下三个条件才是幂函数

①x^{a}的系数为1；　②x^{a}的底数是自变量；　③指数为常数.

（3）幂函数的图象和性质

3、常见的幂函数图像及性质：

函数	$y=x$	$y=x^{2}$	$y=x^{3}$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图象					
定义域	R	R	R	$\{x\mid x\geq 0\}$	$\{x\mid x\neq 0\}$
值域	R	$\{y\mid y\geq 0\}$	R	$\{y\mid y\geq 0\}$	$\{y\mid y\neq 0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	在R上单调递增	在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增	在R上单调递增	在$[0，+\infty)$上单调递增	在$(-\infty，0)$和$(0，+\infty)$上单调递减
公共点	$(1，1)$				

4、二次函数解析式的三种形式

（1）一般式：$f(x)=ax^{2}+bx+c(a\neq 0)$；

（2）顶点式：$f(x)=a(x-m)^{2}+n(a\neq 0)$；其中，$(m,n)$为抛物线顶点坐标，$x=m$为对称轴方程.

（3）零点式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，其中，$x_1,x_2$ 是抛物线与 x 轴交点的横坐标.

5、二次函数的图像

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像是一条抛物线，对称轴方程为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.

（1）单调性与最值

①当 $a>0$ 时，如图所示，抛物线开口向上，函数在 $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ 上递减，在 $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ 上递增，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$f(x)_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；②当 $a<0$ 时，如图所示，抛物线开口向下，函数在 $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ 上递增，在 $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ 上递减，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，；

$f(x)_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

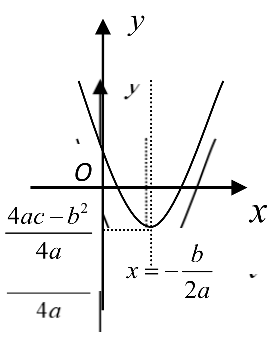


图 2-8

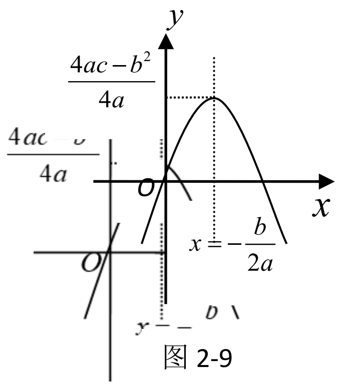


图 2-9

（2）与 x 轴相交的弦长

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像与 x 轴有两个交点 $M_1(x_1,0)$ 和 $M_2(x_2,0)$，$|M_1M_2|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

6、二次函数在闭区间上的最值

闭区间上二次函数最值的取得确定是在区间端点或顶点处.

对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[p,q]$ 上的最大值是

M，最小值是m，令$x_0=\dfrac{p+q}{2}$：

（1）若$-\dfrac{b}{2a}\le p$，则$m=f(p),M=f(q)$；

（2）若$p<-\dfrac{b}{2a}<x_0$，则$m=f(-\dfrac{b}{2a}),M=f(q)$；

（3）若$x_0\le-\dfrac{b}{2a}<q$，则$m=f(-\dfrac{b}{2a}),M=f(p)$；

（4）若$-\dfrac{b}{2a}\ge q$，则$m=f(q),M=f(p)$．

【方法技巧与总结】

1、幂函数$y=x^a(a\in R)$在第一象限内图象的画法如下：

①当$a<0$时，其图象可类似$y=x^{-1}$画出；

②当$0<a<1$时，其图象可类似$y=x^{\frac{1}{2}}$画出；

③当$a>1$时，其图象可类似$y=x^2$画出．

2、实系数一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\ne0)$的实根符号与系数之间的关系

（1）方程有两个不等正根$x_1,x_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0\\x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}$

（2）方程有两个不等负根$x_1,x_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}<0\\x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}$

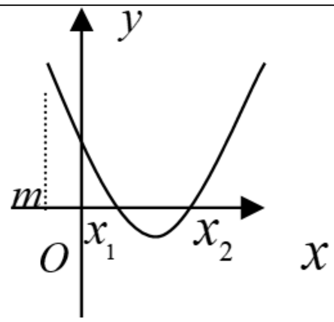
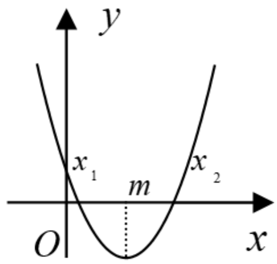
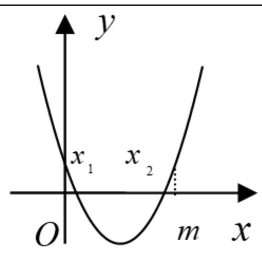
（3）方程有一正根和一负根，设两根为$x_1,x_2\Leftrightarrow x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$

3、一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的分布问题

一般状况下须要从以下 4 个方面考虑：

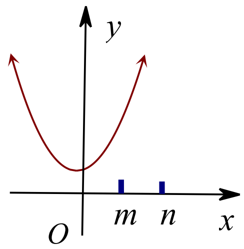
（1）开口方向；（2）判别式；（3）对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 与区间端点的关系；（4）区间端点函数值的正负.

设 x_1,x_2 为实系数方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两根，则一元二次 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根的分布与其限定条件如表所示.

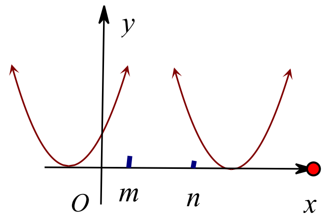
根的分布	图像	限定条件
$m<x_1<x_2$		$\begin{cases}\Delta>0\\-\dfrac{b}{2a}>m\\f(m)>0\end{cases}$
$x_1<m<x_2$		$f(m)<0$
$x_1<x_2<m$		$\begin{cases}\Delta>0\\-\dfrac{b}{2a}<m\\f(m)>0\end{cases}$

<table>
<tr><td rowspan="5">在区间(m,n)内

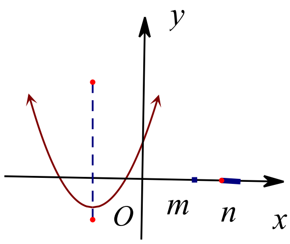
没有实根</td><td>



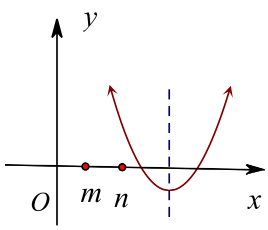
</td><td>$\Delta<0$</td></tr>
<tr><td>



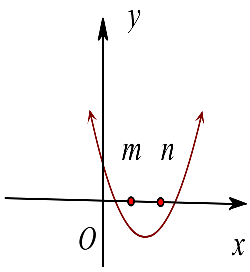
</td><td>$\Delta=0$
$x_1=x_2\le m$
或$x_1=x_2\ge m$</td></tr>
<tr><td>



</td><td>$\begin{cases}\Delta>0\\ -\dfrac{b}{2a}<m\\ f(m)\ge 0\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>



</td><td>$\begin{cases}\Delta>0\\ -\dfrac{b}{2a}>n\\ f(n)\ge 0\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>



</td><td>$\begin{cases}f(m)\le 0\\ f(n)\le 0\end{cases}$</td></tr>
</table>