2023 年高考数学试题分项版——函数、导数应用（解析版）

一、选择题

1．(2023 新高考Ⅰ卷，4)设函数 $f\left(x\right)=2^{x\left(x-a\right)}$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,-2\right]$　　　　B. $\left[-2,0\right)$

C. $\left(0,2\right]$　　　　D. $\left[2,+\infty\right)$

【答案】D

【解析】函数 $y=2^x$ 在 R 上单调递增，而函数 $f\left(x\right)=2^{x\left(x-a\right)}$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，

则有函数 $y=x(x-a)=(x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，因此 $\frac{a}{2}\geq 1$，解得 $a\geq 2$，

所以 a 的取值范围是 $\left[2,+\infty\right)$.

故选：D.

2．(多选)(2023 新高考Ⅰ卷，10)噪声污染问题越来越受到重视．用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times\lg\frac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0\left(p_0>0\right)$ 是听觉下限阈值，p 是实际声压．下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离 /m	声压级 /dB
燃油汽车	10	$60\sim 90$
混合动力汽车	10	$50\sim 60$
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 $10\mathrm{m}$ 处测得实际声压分别为 p_1,p_2,p_3，则（　　）.

A. $p_1\geq p_2$　　　　B. $p_2>10p_3$

C. $p_3=100p_0$　　　　D. $p_1\leq 100p_2$

【答案】ACD

【解析】由题意可知：$L_{p_1}\in[60,90]$，$L_{p_2}\in[50,60]$，$L_{p_3}=40$，

对于选项A：可得 $L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\frac{p_1}{p_0}-20\times\lg\frac{p_2}{p_0}=20\times\lg\frac{p_1}{p_2}$，

因为 $L_{p_1}\geq L_{p_2}$，则 $L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\frac{p_1}{p_2}\geq 0$，即 $\lg\frac{p_1}{p_2}\geq 0$，

所以 $\frac{p_1}{p_2}\geq 1$ 且 $p_1,p_2>0$，可得 $p_1\geq p_2$，故A正确；

对于选项B：可得 $L_{p_2}-L_{p_3}=20\times\lg\frac{p_2}{p_0}-20\times\lg\frac{p_3}{p_0}=20\times\lg\frac{p_2}{p_3}$，

因为 $L_{p_2}-L_{p_3}=L_{p_2}-40\geq 10$，则 $20\times\lg\frac{p_2}{p_3}\geq 10$，即 $\lg\frac{p_2}{p_3}\geq\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{p_2}{p_3}\geq\sqrt{e}$ 且 $p_2,p_3>0$，可得 $p_2\geq\sqrt{e}p_3$，

当且仅当 $L_{p_2}=50$ 时，等号成立，故B错误；

对于选项C：因为 $L_{p_3}=20\times\lg\frac{p_3}{p_0}=40$，即 $\lg\frac{p_3}{p_0}=2$，

可得 $\frac{p_3}{p_0}=100$，即 $p_3=100p_0$，故C正确；

对于选项D：由选项A可知：$L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\frac{p_1}{p_2}$，

且 $L_{p_1}-L_{p_2}\leq 90-50=40$，则 $20\times\lg\frac{p_1}{p_2}\leq 40$，

即 $\lg\frac{p_1}{p_2}\leq 2$，可得 $\frac{p_1}{p_2}\leq 100$，且 $p_1,p_2>0$，所以 $p_1\leq 100p_2$，故D正确；

故选：ACD.

3.(多选)(2023新高考Ⅰ卷,11)已知函数 $f(x)$ 的定义域为R，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，

则（　　）.

A. $f(0)=0$　　　　B. $f(1)=0$

C. $f(x)$ 是偶函数　　　　D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

【答案】ABC

【解析】方法一：

因为 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，

对于A，令 $x=y=0$，$f(0)=0f(0)+0f(0)=0$，故A 正确.

对于B，令 $x=y=1$，$f(1)=1f(1)+1f(1)$，则 $f(1)=0$，故B 正确.

对于C，令 $x=y=-1$，$f(1)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$，则 $f(-1)=0$，

令 $y=-1, f(-x)=f(x)+x^2f(-1)=f(x)$，

又函数 $f(x)$ 的定义域为 R，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 C 正确，

对于D，不妨令 $f(x)=0$，显然符合题设条件，此时 $f(x)$ 无极值，故D 错误.

方法二：

因为 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，

对于A，令 $x=y=0$，$f(0)=0f(0)+0f(0)=0$，故A 正确.

对于B，令 $x=y=1$，$f(1)=1f(1)+1f(1)$，则 $f(1)=0$，故B 正确.

对于C，令 $x=y=-1$，$f(1)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$，则 $f(-1)=0$，

令 $y=-1, f(-x)=f(x)+x^2f(-1)=f(x)$，

又函数 $f(x)$ 的定义域为 R，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 C 正确，

对于D，当 $x^2y^2\neq0$ 时，对 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$ 两边同时除以 x^2y^2，得到

$$\frac{f(xy)}{x^2y^2}=\frac{f(x)}{x^2}+\frac{f(y)}{y^2}，$$

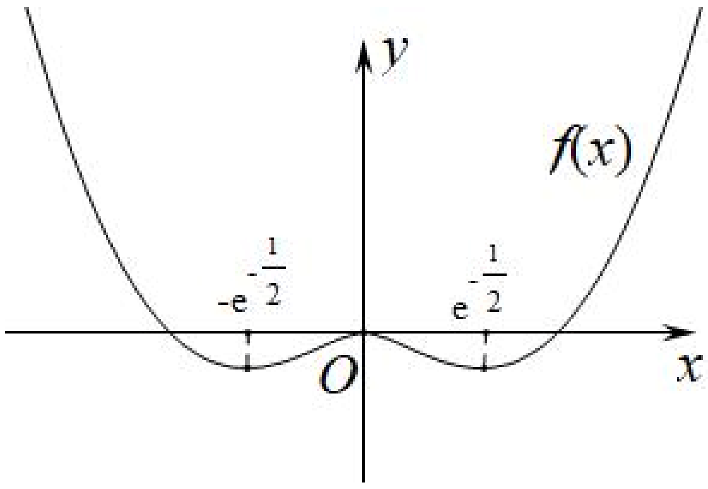
故可以设 $\frac{f(x)}{x^2}=\ln|x|\ (x\neq0)$，则 $f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x|,x\neq0\\0,x=0\end{cases}$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2\ln x$，则 $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$，

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<e^{-\frac{1}{2}}$；令 $f'(x)>0$，得 $x>e^{-\frac{1}{2}}$；

故 $f(x)$ 在 $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $\left(-e^{-\frac{1}{2}}, 0\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\infty, -e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，



显然，此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值，故 D 错误.

故选：ABC .

4．(2023新高考II卷，4)若 $f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数，则 $a=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(1)=f(-1)$，$\therefore (1+a)\ln\frac{1}{3}=(-1+a)\ln 3$，解得 $a=0$，

当 $a=0$ 时，$f(x)=x\ln\frac{2x-1}{2x+1}$，$(2x-1)(2x+1)>0$，解得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$，

则其定义域为 $\left\{x \middle| x>\frac{1}{2} \text{ 或 } x<-\frac{1}{2}\right\}$，关于原点对称.

$$f(-x)=(-x)\ln\frac{2(-x)-1}{2(-x)+1}=(-x)\ln\frac{2x+1}{2x-1}=(-x)\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-1}=x\ln\frac{2x-1}{2x+1}=f(x)，$$

故此时 $f(x)$ 为偶函数.

故选：B.

5．(2023新高考II卷，6)已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，则 a 的最小值为（　　）

A. e^2　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

【答案】C

【解析】依题可知，$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}\ge 0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，显然 $a>0$，所以 $xe^x\ge\frac{1}{a}$，

设 $g(x)=xe^x,x\in(1,2)$，所以 $g'(x)=(x+1)e^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

$g(x)>g(1)=e$，故 $e\ge\frac{1}{a}$，即 $a\ge\frac{1}{e}=e^{-1}$，即 a 的最小值为 e^{-1}．

故选：C．

6．(多选)(2023新高考II卷，11)若函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\ne 0)$ 既有极大值也有极小值，则（　　）

A. $bc>0$　　B. $ab>0$　　C. $b^2+8ac>0$　　D. $ac<0$

【答案】BCD

【解析】函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

求导得 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}$，

因为函数 $f(x)$ 既有极大值也有极小值，则函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个变号零点，

而 $a\ne 0$，

因此方程 $ax^2-bx-2c=0$ 有两个不等的正根 x_1,x_2，

于是 $\begin{cases}\Delta=b^2+8ac>0\\ x_1+x_2=\frac{b}{a}>0\\ x_1x_2=-\frac{2c}{a}>0\end{cases}$，即有 $b^2+8ac>0$，$ab>0$，$ac<0$，显然 $a^2bc<0$，

即 $bc<0$，A 错误，BCD 正确．

故选：BCD．

7．(2023全国甲卷文，8)曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$ 在点 $\left(1,\frac{e}{2}\right)$ 处的切线方程为（　　）

A. $y=\frac{e}{4}x$　　B. $y=\frac{e}{2}x$　　C. $y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$　　D. $y=\frac{e}{2}x+\frac{3e}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】先由切点设切线方程，再求函数的导数，把切点的横坐标代入导数得到切线的斜率，代入所设方程即可求解.

【详解】设曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$ 在点 $\left(1,\frac{e}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y-\frac{e}{2}=k(x-1)$，

因为 $y=\frac{e^x}{x+1}$，

所以 $y'=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$，

所以 $k=y'|_{x=1}=\frac{e}{4}$

所以 $y-\frac{e}{2}=\frac{e}{4}(x-1)$

所以曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$ 在点 $\left(1,\frac{e}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$.

故选：C

8．(2023·全国甲卷文，11) 已知函数 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$．记 $a=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),b=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),c=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，则（　　）

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

【答案】A

【解析】

【分析】利用作差法比较自变量的大小，再根据指数函数的单调性及二次函数的性质判断即可.

【详解】令 $g(x)=-(x-1)^2$，则 $g(x)$ 开口向下，对称轴为 $x=1$，

因为 $\frac{\sqrt{6}}{2}-1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{2}$，而 $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2-4^2=9+6\sqrt{2}-16=6\sqrt{2}-7>0$，

所以 $\frac{\sqrt{6}}{2}-1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-4}{2}>0$，即 $\frac{\sqrt{6}}{2}-1>1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

由二次函数性质知 $g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

因为 $\frac{\sqrt{6}}{2}-1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-4}{2}$，而

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-4^2=8+4\sqrt{3}-16=4\sqrt{3}-8=4(\sqrt{3}-2)<0$，

即 $\frac{\sqrt{6}}{2}-1<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)>g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

综上，$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

又 $y=e^x$ 为增函数，故 $a<c<b$，即 $b>c>a$.

故选：A.

9．(2023全国乙卷理，4)已知 $f(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据偶函数的定义运算求解.

【详解】因为 $f(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 为偶函数，则

$f(x)-f(-x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}-\frac{(-x)e^{-x}}{e^{-ax}-1}=\frac{x\left[e^x-e^{(a-1)x}\right]}{e^{ax}-1}=0$，

又因为 x 不恒为0，可得 $e^x-e^{(a-1)x}=0$，即 $e^x=e^{(a-1)x}$，

则 $x=(a-1)x$，即 $1=a-1$，解得 $a=2$.

故选：D.

10．(2023全国乙卷文，5)已知 $f(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$（　　）

A. -2　　　　B. -1　　　　C. 1　　　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据偶函数的定义运算求解.

【详解】因为 $f(x)=\dfrac{xe^{x}}{e^{ax}-1}$ 为偶函数，则

$$f(x)-f(-x)=\frac{xe^{x}}{e^{ax}-1}-\frac{(-x)e^{-x}}{e^{-ax}-1}=\frac{x\left[e^{x}-e^{(a-1)x}\right]}{e^{ax}-1}=0,$$

又因为 x 不恒为 0，可得 $e^{x}-e^{(a-1)x}=0$，即 $e^{x}=e^{(a-1)x}$，

则 $x=(a-1)x$，即 $1=a-1$，解得 $a=2$.

故选：D.

11．(2023·全国乙卷文，8)函数 $f(x)=x^3+ax+2$ 存在 3 个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-2)$　　　　B. $(-\infty,-3)$　　　　C. $(-4,-1)$　　　　D. $(-3,0)$

【答案】B

【解析】

【分析】写出 $f'(x)=3x^2+a$，并求出极值点，转化为极大值大于 0 且极小值小于 0 即可.

【详解】$f(x)=x^3+ax+2$，则 $f'(x)=3x^2+a$，

若 $f(x)$ 要存在 3 个零点，则 $f(x)$ 要存在极大值和极小值，则 $a<0$，

令 $f'(x)=3x^2+a=0$，解得 $x=-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$ 或 $\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$，

且当 $x\in\left(-\infty,-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in\left(-\sqrt{-\dfrac{a}{3}},\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)$，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)$，极小值为 $f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)$，

若 $f(x)$ 要存在 3 个零点，则 $\begin{cases} f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)<0 \\ f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)>0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a\sqrt{\frac{a}{3}}+2<0 \\ -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+a\sqrt{\frac{a}{3}}+2>0 \end{cases}$，解得 $a>3$，

故选：B.

12．(2023·北京卷，4)下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A. $f(x)=-\ln x$　　　　B. $f(x)=\frac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\frac{1}{x}$　　　　D. $f(x)=3^{|x-1|}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用基本初等函数的单调性，结合复合函数的单调性判断 ABC，举反例排除 D 即可.

【详解】对于 A，因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$y=-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 A 错误；

对于 B，因为 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)=\frac{1}{2^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 B 错误；

对于 C，因为 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$y=-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 C 正确；

对于 D，因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\left|\frac{1}{2}-1\right|}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$f(1)=3^{|1-1|}=3^0=1$，$f(2)=3^{|2-1|}=3$，

显然 $f(x)=3^{|x-1|}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不单调，D 错误.

故选：C.

13．(2023·天津卷，3)若 $a=1.01^{0.5}$，$b=1.01^{0.6}$，$c=0.6^{0.5}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A. $c>a>b$　　　　B. $c>b>a$

C. $a>b>c$　　　　　　　　　　　　　D. $b>a>c$

【答案】D

【解析】

【分析】根据对应幂、指数函数的单调性判断大小关系即可.

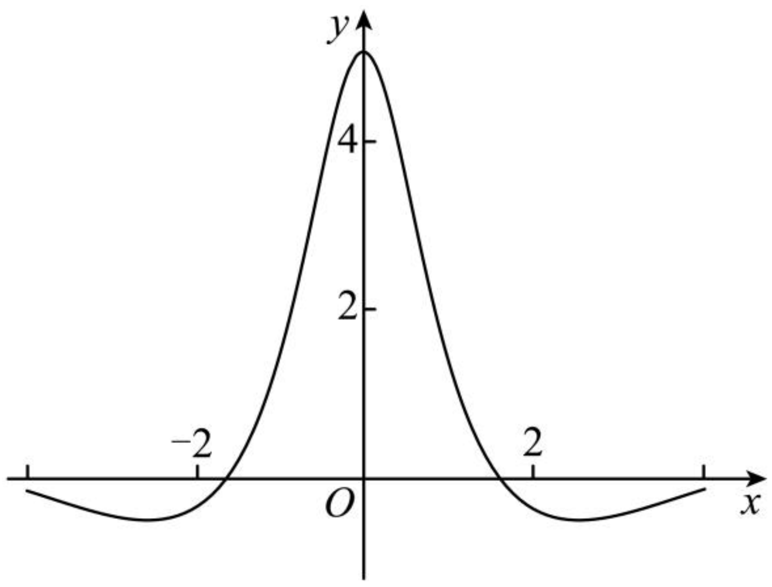
【详解】由 $y=1.01^{x}$ 在 R 上递增，则 $a=1.01^{0.5}<b=1.01^{0.6}$，

由 $y=x^{0.5}$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，则 $a=1.01^{0.5}>c=0.6^{0.5}$.

所以 $b>a>c$.

故选：D

14．(2023·天津卷，4)函数 $f(x)$ 的图象如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）



A. $\dfrac{5(e^{x}-e^{-x})}{x^{2}+2}$　　　　　　　　B. $\dfrac{5\sin x}{x^{2}+1}$

C. $\dfrac{5(e^{x}+e^{-x})}{x^{2}+2}$　　　　　　　　D. $\dfrac{5\cos x}{x^{2}+1}$

【答案】D

【解析】

【分析】由图知函数为偶函数，应用排除，先判断 B 中函数的奇偶性，再判断 A、C 中函数在 $(0,+\infty)$ 上的函数符号排除选项，即得答案.

【详解】由图知：函数图象关于 y 轴对称，其为偶函数，且 $f(-2)=f(2)<0$，

由 $\dfrac{5\sin(-x)}{(-x)^{2}+1}=-\dfrac{5\sin x}{x^{2}+1}$ 且定义域为 R，即 B 中函数为奇函数，排除；

当 $x>0$ 时 $\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}>0$、$\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}>0$，即 A、C 中 $(0,+\infty)$ 上函数值为正，排除；

故选：D

二、填空题

1．(2023·全国甲卷理，13)若 $y=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $a=$________.

【答案】2

【解析】

【分析】利用偶函数的性质得到 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，从而求得 $a=2$，再检验即可得解.

【详解】因为 $y=f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=(x-1)^2+ax+\cos x$ 为偶函数，定义域为 R，

所以 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)^2-\frac{\pi}{2}a+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2+\frac{\pi}{2}a+\cos\frac{\pi}{2}$，

则 $\pi a=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2=2\pi$，故 $a=2$，

此时 $f(x)=(x-1)^2+2x+\cos x=x^2+1+\cos x$，

所以 $f(-x)=(-x)^2+1+\cos(-x)=x^2+1+\cos x=f(x)$，

又定义域为 R，故 $f(x)$ 为偶函数，

所以 $a=2$.

故答案为：2.

2．(2023·全国甲卷文，14)若 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $a=$________.

【答案】2

【解析】

【分析】根据常见函数的奇偶性直接求解即可.

【详解】

$\therefore f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=(x-1)^2+ax+\cos x=x^2+(a-2)x+1+\cos x$,

且函数为偶函数,

$\therefore a-2=0$，解得 $a=2$，

故答案为：2

3．(2023全国乙卷理，16)设 $a\in(0,1)$，若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是______.

【答案】$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$

【解析】

【分析】原问题等价于 $f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geq 0$ 恒成立，据此将所得的不等式进行恒等变形，可得 $\left(\frac{1+a}{a}\right)^x\geq-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$，由右侧函数的单调性可得实数 a 的二次不等式，求解二次不等式后可确定实数 a 的取值范围.

【详解】由函数的解析式可得 $f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geq 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

则 $(1+a)^x\ln(1+a)\geq -a^x\ln a$，即 $\left(\frac{1+a}{a}\right)^x\geq-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

故 $\left(\frac{1+a}{a}\right)^0=1\geq-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$，而 $a+1\in(1,2)$，故 $\ln(1+a)>0$，

故 $\begin{cases}\ln(a+1)\geq-\ln a\\0<a<1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a(a+1)\geq 1\\0<a<1\end{cases}$，故 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq a<1$，

结合题意可得实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.

故答案为：$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.

4．(2023北京卷，11)已知函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$______.

【答案】1

【解析】

【分析】根据给定条件，把 $x=\frac{1}{2}$ 代入，利用指数、对数运算计算作答.

【详解】函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$，所以 $f(\frac{1}{2})=4^{\frac{1}{2}}+\log_2\frac{1}{2}=2-1=1$.

故答案为：1

5．(2023·北京卷，15)设 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, x<-a,\\ \sqrt{a^2-x^2}, -a\le x\le a,\\ -\sqrt{x}-1, x>a.\end{cases}$，给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $a\ge 1$ 时，$f(x)$ 存在最大值；

③设 $M(x_1,f(x_1))(x_1\le -a)$，$N(x_2,f(x_2))(x_2>a)$，则 $|MN|>1$；

④设 $P(x_3,f(x_3))(x_3<-a)$，$Q(x_4,f(x_4))(x_4\ge -a)$．若 $|PQ|$ 存在最小值，则 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

其中所有正确结论的序号是____________.

【答案】②③

【解析】

【分析】先分析 $f(x)$ 的图像，再逐一分析各结论；对于①，取 $a=\frac{1}{2}$，结合图像即可判断；对于②，分段讨论 $f(x)$ 的取值范围，从而得以判断；对于③，结合图像可知 $|MN|$ 的范围；对于④，取 $a=\frac{4}{5}$，结合图像可知此时 $|PQ|$ 存在最小值，从而得以判断.

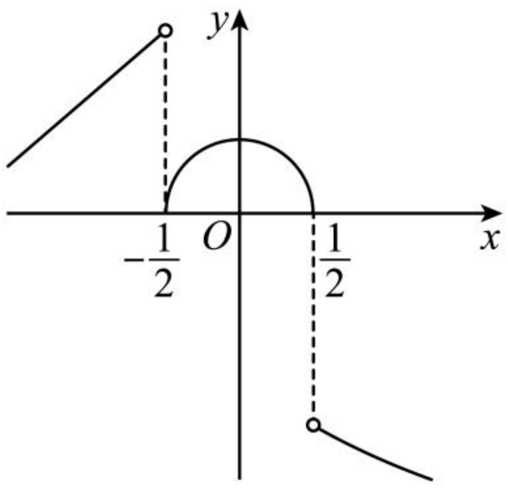
【详解】依题意，$a>0$，

当 $x<-a$ 时，$f(x)=x+2$，易知其图像为一条端点取不到值的单调递增的射线；

当 $-a\le x\le a$ 时，$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$，易知其图像是，圆心为 $(0,0)$，半径为 a 的圆在 x 轴上方的图像（即半圆）；

当 $x>a$ 时，$f(x)=-\sqrt{x}-1$，易知其图像是一条端点取不到值的单调递减的曲线；

对于①，取 $a=\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 的图像如下，



显然，当 $x\in(a-1,+\infty)$，即 $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 上单调递增，故①错误；

对于②，当 $a=1$ 时，

当 $x<-a$ 时，$f(x)=x+2<-a+2=1$；

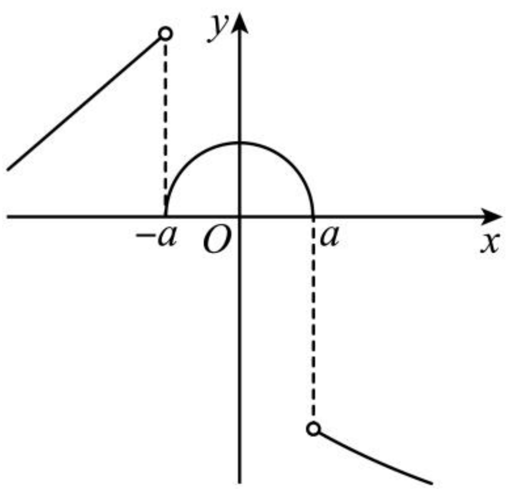
当 $-a\le x\le a$ 时，$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ 显然取得最大值 a；

当 $x>a$ 时，$f(x)=-\sqrt{x}-1<-\sqrt{a}-1=-2$，

综上：$f(x)$ 取得最大值 a，故②正确；

对于③，结合图像，易知在 $x_1=a$，$x_2>a$ 且接近于 $x=a$ 处，

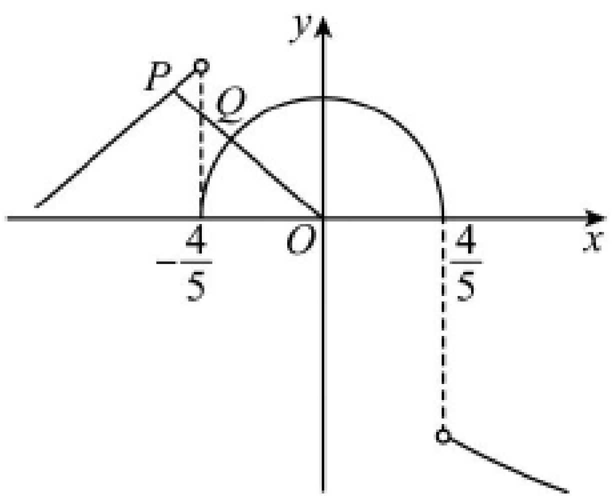
$M(x_1,f(x_1))(x_1\le a)$，$N(x_2,f(x_2))(x_2>a)$ 的距离最小，



当 $x_1=a$ 时，$y=f(x_1)=0$，当 $x_2>a$ 且接近于 $x=a$ 处，$y_2=f(x_2)<-\sqrt{a}-1$，

此时，$|MN|>y_1-y_2>\sqrt{a}+1>1$，故③正确；

对于④，取 $a=\frac{4}{5}$，则 $f(x)$ 的图像如下，



因为 $P(x_3,f(x_3))(x_3<-a)$，$Q(x_4,f(x_4))(-a\le x_4\le a)$，

结合图像可知，要使 $|PQ|$ 取得最小值，则点 P 在 $f(x)=x+2\left(x<-\frac{4}{5}\right)$ 上，点 Q 在

$f(x)=\sqrt{\frac{16}{25}-x^2}\left(-\frac{4}{5}\le x\le\frac{4}{5}\right)$，

同时 $|PQ|$ 的最小值为点 O 到 $f(x)=x+2\left(x<-\frac{4}{5}\right)$ 的距离减去半圆的半径 a，

此时，因为 $f(x)=y=x+2\left(x<-\frac{4}{5}\right)$ 的斜率为 1，则 $k_{OP}=-1$，故直线 OP 的方程为

$y=-x$，

联立 $\begin{cases}y=-x\\y=x+2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，则 $P(-1,1)$，

显然 $P(-1,1)$ 在 $f(x)=x+2\left(x<-\frac{4}{5}\right)$ 上，满足 $|PQ|$ 取得最小值，

即 $a=\frac{4}{5}$ 也满足 $|PQ|$ 存在最小值，故 a 的取值范围不仅仅是 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$，故④错误.

故答案为：②③.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是分析得 $f(x)$ 的图像，特别是当 $-a\le x\le a$ 时，

$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ 的图像为半圆，解决命题④时，可取特殊值进行排除即可.

6．(2023 天津卷，15)若函数 $f(x)=ax^2-2x-|x^2-ax+1|$ 有且仅有两个零点，则 a 的取值范围为_________.

【答案】$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

【解析】

【分析】根据绝对值的意义，去掉绝对值，求出零点，再根据根存在的条件即可判断 a 的取值范围.

【详解】(1) 当 $x^2+ax+1\geq 0$ 时，$f(x)=0\Leftrightarrow(a+1)x^2+(a+2)x+1=0$，

即 $[(a+1)x+1](x+1)=0$，

若 $a=-1$ 时，$x=-1$，此时 $x^2+ax+1\geq 0$ 成立；

若 $a\neq -1$ 时，$x=-\frac{1}{a+1}$ 或 $x=-1$，

若方程有一根为 $x=-1$，则 $1-a+1\geq 0$，即 $a\leq 2$ 且 $a\neq -1$；

若方程有一根为 $x=-\frac{1}{a+1}$，则 $\left(-\frac{1}{a+1}\right)^2+a\cdot\left(-\frac{1}{a+1}\right)+1\geq 0$，解得：$a\geq -2$ 且 $a\neq -1$；

若 $x=-\frac{1}{a+1}=-1$ 时，$a=0$，此时 $1-a+1\geq 0$ 成立.

(2) 当 $x^2+ax+1<0$ 时，$f(x)=0\Leftrightarrow(a-1)x^2+(a-2)x-1=0$，

即 $[(a-1)x-1](x+1)=0$，

若 $a-1=0$ 时，$x=-1$，显然 $x^2+ax+1<0$ 不成立；

若 $a-1\neq 0$ 时，$x=-1$ 或 $x=\frac{1}{a-1}$，

若方程有一根为 $x=-1$，则 $1-a+1<0$，即 $a>2$；

若方程有一根为 $x=\frac{1}{a-1}$，则 $\left(\frac{1}{a-1}\right)^2+a\cdot\frac{1}{a-1}+1<0$，解得：$a<-2$；

若 $x=\frac{1}{a-1}=-1$ 时，$a=0$，显然 $x^2+ax+1<0$ 不成立；

综上，

当 $a<-2$ 时，零点为 $-\frac{1}{a+1}$，$\frac{1}{a-1}$；

当 $-2\leq a<0$ 时，零点为 $-\frac{1}{a+1}$，-1；

当 $a=0$ 时，只有一个零点 -1；

当 $0<a<1$ 时，零点为 $-\frac{1}{a+1}$，-1；

当 $a=1$ 时，只有一个零点 -1；

当 $1<a\leq 2$ 时，零点为 $-\frac{1}{a+1}$，-1；

当 $a=2$ 时，零点为 $1,-1$.

所以，当函数有两个零点时，$a\neq 0$ 且 $a\neq 1$.

故答案为：$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

【点睛】本题的解题关键是根据定义去掉绝对值，求出方程的根，再根据根存在的条件求出对应的范围，然后根据范围讨论根（或零点）的个数，从而解出.

三、解答题

1．(2023 新高考Ⅰ卷，19)已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

（1）解：因为 $f(x)=a(e^x+a)-x$，定义域为 R，所以 $f'(x)=ae^x-1$，

当 $a\le 0$ 时，由于 $e^x>0$，则 $ae^x\le 0$，故 $f'(x)=ae^x-1<0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 R 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=ae^x-1=0$，解得 $x=-\ln a$，

当 $x<-\ln a$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减；

当 $x>-\ln a$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增；

综上：当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

（2）证明：方法一：

由（1）得，$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$，

要证 $f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，即证 $1+a^2+\ln a>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，即证 $a^2-\dfrac{1}{2}-\ln a>0$ 恒成立，

令 $g(a)=a^2-\dfrac{1}{2}-\ln a\ (a>0)$，则 $g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-1}{a}$，

令 $g'(a)<0$，则 $0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；令 $g'(a)>0$，则 $a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

所以 $g(a)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(a)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$，则 $g(a)>0$ 恒成立，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$ 恒成立，证毕.

方法二：

令 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1$，

由于 $y=e^x$ 在 R 上单调递增，所以 $h'(x)=e^x-1$ 在 R 上单调递增，

又 $h'(0)=e^0-1=0$，

所以当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$；

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h(x)\geq h(0)=0$，则 $e^x\geq x+1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

因为 $f(x)=a\left(e^x+a\right)-x=ae^x+a^2-x=e^{x+\ln a}+a^2-x\geq x+\ln a+1+a^2-x$，

当且仅当 $x+\ln a=0$，即 $x=-\ln a$ 时，等号成立，

所以要证 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证 $x+\ln a+1+a^2-x>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证 $a^2-\frac{1}{2}-\ln a>0$，

令 $g(a)=a^2-\frac{1}{2}-\ln a\ (a>0)$，则 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$，

令 $g'(a)<0$，则 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$；令 $g'(a)>0$，则 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$；

所以 $g(a)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(a)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$，则 $g(a)>0$ 恒成立，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$ 恒成立，证毕.

2．(2023新高考II卷，22)（1）证明：当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$；

（2）已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln\left(1-x^2\right)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.