2020-2021学年福建省福州市高二（上）期末数学试卷

一、单项选择题（共8小题）．

1．若命题p：$\exists x_0<1$，$x_0^2<1$，则$\neg p$为（　　）

A．$\forall x<1$，$x^2\geqslant 1$　　B．$\forall x<1$，$x^2<1$

C．$\exists x_0<1$，$x_0^2\geqslant 1$　　D．$\exists x_0\geqslant 1$，$x_0^2<1$

2．某校共有1500名学生，现用系统抽样的方法从中等距抽取50名学生参加志愿者活动，将这1500名学生依次编号为1，2，3，…，1500，已知第一位被抽到的学生编号为4，则下列编号被抽到的是（　　）

A．324　　B．184　　C．104　　D．24

3．下列求导运算正确的是（　　）

A．$(\sin x+\cos x)'=\cos x+\sin x$

B．$(x\ln x)'=\frac{1}{x}$

C．$(e^{2x})'=e^{2x}$

D．$\left(\frac{x}{e^x}\right)'=\frac{1-x}{e^x}$

4．已知$\vec{a}=(\lambda+1，0，1)$，$\vec{b}=(3，2\mu-1，2)$，其中λ，$\mu\in\mathbf{R}$，若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$\lambda+\mu=$（　　）

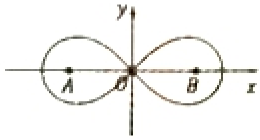
A．0　　B．1　　C．2　　D．3

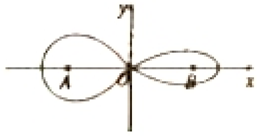
5．设$x\in\mathbf{R}$，则“$x>0$“是“$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$”的（　　）

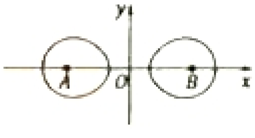
A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

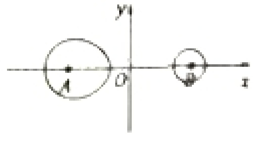
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知A，B是平面内两个定点，平面内满足$|PA|\cdot|PB|=a$（a为大于0的常数）的点P的轨迹称为卡西尼卵形线，它是以发现土星卫星的天文学家乔凡尼•卡西尼的名字命名．当A，B坐标分别为（﹣1，0），（1，0），且$a=1$时，卡西尼卵形线大致为（　　）

A．

B．

C．

D．

7．将一个边长为a的正方形铁片的四角截去四个边长相等的小正方形，做成一个无盖方盒．若该方盒的体积为2，则a的最小值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．$3\sqrt[3]{2}$

8．已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$M$为$E$上一点．若$\angle MF_1F_2=\frac{\pi}{6}$，$|\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_2M}|=|\overrightarrow{F_1F_2}|$，则$E$的离心率为（　　）

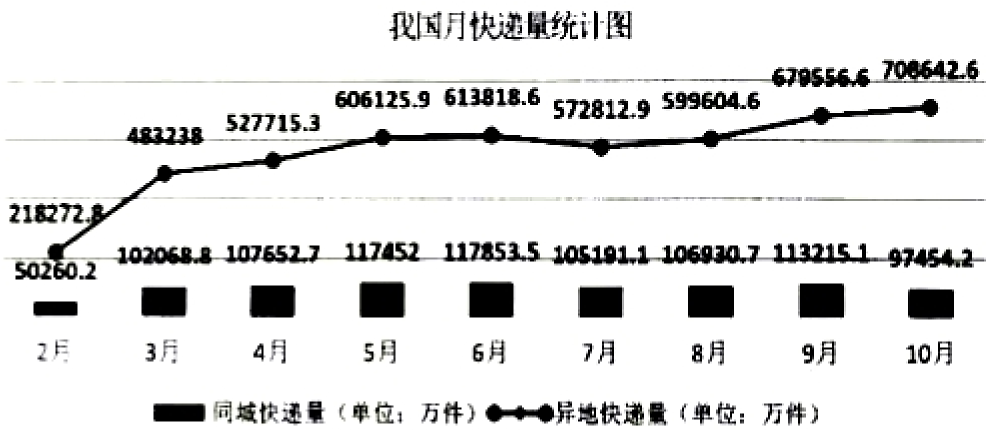
A．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　C．$\sqrt{2}-1$　　D．$\sqrt{3}-1$

二、多项选择题（共4小题）．

9．已知曲线E的方程为$mx^2+ny^2=1$（$mn\neq0$），则E可能是（　　）

A．圆　　B．椭圆　　C．双曲线　　D．抛物线

10．如图为我国2020年2月至10月的同城快递量与异地快递量的月统计图：根据统计图，下列结论正确的是（　　）



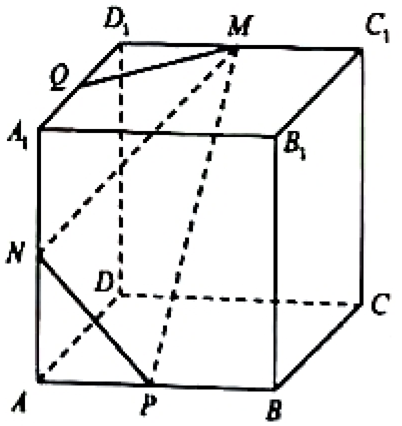
A．异地快递量逐月递增

B．同城快递量，9月份多于10月份

C．同城和异地的月快递量达到峰值的月份相同

D．同城和异地的快递量的月增长率达到最大的月份相同

11．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M，N，P，Q分别是所在棱的中点，则下列结论正确的是（　　）



A．点C_1，D_1到平面PMN的距离相等

B．PN与QM为异面直线

C．$\angle PNM=90°$

D．平面PMN截该正方体的截面为正六边形

12．已知函数$f(x)=e^{|x|}\bullet\sin x+1$，则（　　）

A．$f(x)$的周期为2π

B．$f(x)$的图象关于点（0，1）对称

C．$f(x)$在$[0,\dfrac{3\pi}{4}]$上为增函数

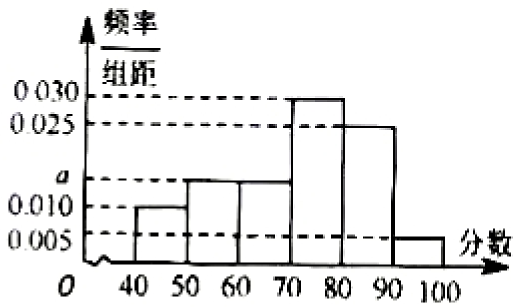
D．$f(x)$在区间$[-5\pi,5\pi]$上所有的极值之和为10

三、填空题（共4小题）．

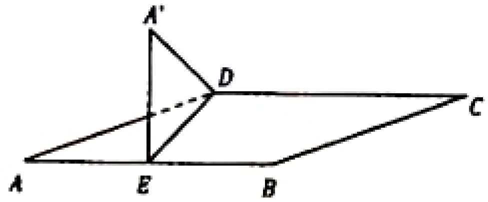
13．双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$的渐近线方程是______．

14．在区间$[-3,1]$上随机取一个数x，若事件A：$x\leqslant m$的概率为$\dfrac{3}{4}$，则m的值为______．

15．某次数学竞赛有100位同学参加，如图为这100位同学此次竞赛成绩的频率分布直方图，则a=________________________________，这100位同学此次竞赛成绩的中位数约为．（中位数精确到0.01．）



16．如图所示，在平行四边形$ABCD$中，E为AB中点，$DE \perp AB$，$DC=8$，$DE=6$．沿着DE将△ADE折起，使A到达点A'的位置，且平面$A'DE \perp$平面$BCDE$．设P为△$A'DE$内的动点，若$\angle EPB=\angle DPC$，则P的轨迹的长度为______．



四、解答题（共6小题）．

17．已知函数$f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+3$．

（1）求曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程；

（2）求$f(x)$在$[-2, 1]$上的最大值和最小值．

18．已知抛物线E：$y^2=2px$的焦点为F，$P(1, 1)$为E上一点．

（1）求E的方程及F的坐标；

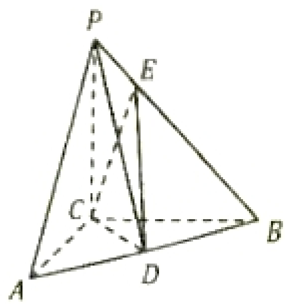
（2）设斜率为1的直线l与E交于A，B两点，若$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-2$，求$l$的方程．

19．在①$PD \perp AB$，②$\angle PCA=\angle PCB$，③平面$PCD \perp$平面ABC这三个条件中任选一个，补充在下面问题的横线上，并解答．

问题：已知在三棱锥$P-ABC$中，D为AB的中点，______，$AC=BC=2$．

（1）证明：$PC \perp AB$；

（2）若$PC=2$，$\angle PCB=\angle ACB=90°$，$E$为线段$PB$上一点，且$EB=3PE$，求二面角$D-CE-B$的余弦值．



20．已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，$A(0, 1)$为$E$的上顶点．

（1）求E的方程；

（2）以A为直角顶点的Rt△ABC的另两个顶点均在E上运动，求证：直线BC过定点．

21．为了研究某班男生身高和体重的关系，从该班男生中随机选取6名，得到他们的身高和体重的数据如表所示：

编号	1	2	3	4	5	6
身高x（cm）	165	171	167	173	179	171
体重y（kg）	62	m	64	74	74	66

在收集数据时，2号男生的体重数值因字迹模糊看不清，故利用其余5位男生的数据得到身高与体重的线性回归方程为$\hat{y}=\widehat{b_1}x+\widehat{a_1}$．后来得到2号男生的体重精准数值$m$后再次计算得到线性回归方程为$\hat{y}=\widehat{b_2}x+\widehat{a_2}$．

（1）求回归方程$\hat{y}=\widehat{b_1}x+\widehat{a_1}$；

（2）若分别按照$\hat{y}=\widehat{b_1}x+\widehat{a_1}$和$\hat{y}=\widehat{b_2}x+\widehat{a_2}$来预测身高为180$cm$的男生的体重，得到的估计值分别为$w_1$，$w_2$，且$w_2-w_1=2$，求$m$的值；

（3）BMI指数是目前国际上常用的衡量人体胖瘦程度以及是否健康的一个标准，其中BMI指数在24到27.9之间的定义为超重．通过计算可知这6人的BMI指数分别为：22.8，27.4，22.9，24.7，23.1，22.6，现从这6人中任选2人，求恰有1人体重为超重的概率．

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

22．已知函数$f(x)=lnx+\dfrac{2a}{x}$．

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）证明：当$a\geqslant\dfrac{1}{2}$时，$f(x)>e^{-x}+\dfrac{1}{2}$．

参考数据：$e\approx2.7183$．

参考答案

一、单项选择题（共8小题）．

1．若命题p：$\exists x_0<1$，$x_0^2<1$，则$\neg p$为（　　）

A．$\forall x<1$，$x^2\geqslant 1$　　B．$\forall x<1$，$x^2<1$

C．$\exists x_0<1$，$x_0^2\geqslant 1$　　D．$\exists x_0\geqslant 1$，$x_0^2<1$

解：命题p：$\exists x_0<1$，$x_0^2<1$，

根据含有量词的命题的否定，则有$\neg p$为$\forall x<1$，$x^2\geqslant 1$．

故选：A．

2．某校共有1500名学生，现用系统抽样的方法从中等距抽取50名学生参加志愿者活动，将这1500名学生依次编号为1，2，3，…，1500，已知第一位被抽到的学生编号为4，则下列编号被抽到的是（　　）

A．324　　B．184　　C．104　　D．24

解：1500名学生系统抽样抽取50名，则每隔30名抽取1名，

若4被抽取，则被抽取的是4，34，…，$30k+4$，（k为自然数），

符合条件的只有答案B：$184=6\times 30+4$，

故选：B．

3．下列求导运算正确的是（　　）

A．$(\sin x+\cos x)'=\cos x+\sin x$

B．$(x\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

C．$(e^{2x})'=e^{2x}$

D．$\left(\dfrac{x}{e^x}\right)'=\dfrac{1-x}{e^x}$

解：A．$(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$．

B．$(x\ln x)'=1+\ln x$．

C．$(e^{2x})'=2e^{2x}$．

D．$\left(\dfrac{x}{e^x}\right)'=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$．

故选：D．

4．已知$\overrightarrow{a}$＝（λ+1，0，1），$\overrightarrow{b}$＝（3，2μ－1，2），其中λ，μ∈**R**，若$\overrightarrow{a}$∥$\overrightarrow{b}$，则λ+μ＝（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

解：∵$\overrightarrow{a}$∥$\overrightarrow{b}$，

∴设$\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a}$，

∴（3，2μ－1，2）＝（*k*λ+*k*，0，*k*），

∴$\begin{cases}k\lambda+k=3\\2\mu-1=0\\k=2\end{cases}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{1}{2}$，

∴λ+μ＝1．

故选：*B*．

5．设*x*∈**R**，则“*x*＞0“是“$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

解：∵设*x*∈**R**，“$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$”

∴$\frac{x^2-2x+1}{x}\geqslant 0$，

∴$\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$，

∴*x*＞0，

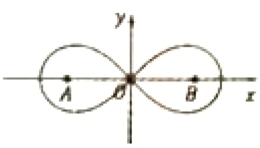
∴“$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$”⇒“*x*＞0”

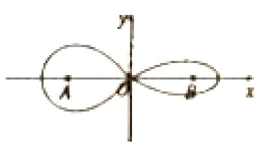
又当*x*＞0时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$成立．

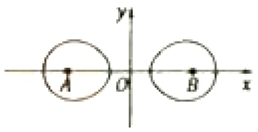
则“*x*＞0“是“$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$“的充分必要条件；

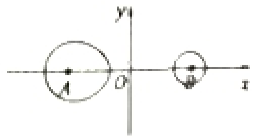
故选：*C*．

6．已知*A*，*B*是平面内两个定点，平面内满足|*PA*|•|*PB*|＝*a*（*a*为大于0的常数）的点*P*的轨迹称为卡西尼卵形线，它是以发现土星卫星的天文学家乔凡尼•卡西尼的名字命名．当*A*，*B*坐标分别为（－1，0），（1，0），且*a*＝1时，卡西尼卵形线大致为（　　）

A．

B．

C. 

D. 

解：由题意设动点坐标为（x，y），

则$\sqrt{(x+1)^2+y^2}\bullet\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1$，

即[（x+1）^{2}+y^2]•[（x－1）^{2}+y^2]＝1，

把原点O（0，0）代入，可得上式成立，故曲线过原点，排除C、D；

把方程中的x被－x代换，y被－y代换，方程不变，

故曲线C关于坐标原点对称，排除B；

故选：A．

7．将一个边长为a的正方形铁片的四角截去四个边长相等的小正方形，做成一个无盖方盒．若该方盒的体积为2，则a的最小值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．$3\sqrt[3]{2}$

解：设截去的四个小正方形的边长为x，则无盖方盒底面是边长为a－2x的正方形，高为x，

所以方盒的体积为$V(x)=(a-2x)x=4x^3-4ax^2+a^2x$，$x\in(0,\frac{a}{2})$，

则$V'(x)=12x^2-8ax+a^2=(2x-a)(6x-a)$，$x\in(0,\frac{a}{2})$，

令V'（x）＝0，解得$x=\frac{a}{2}$，$x=\frac{a}{6}$，

当$0<x<\frac{a}{6}$时，V'（x）＞0，所以V（x）单调递增，

当$\frac{a}{6}<x<\frac{a}{2}$时，$V'$（$x$）＜0，所以$V$（$x$）单调递减，

故$V(x)_{max}=V(\frac{a}{6})=\frac{2a^3}{27}$，

若该方盒的体积为2，

则有$V(x)_{max}=V(\frac{a}{6})=\frac{2a^3}{27}\geqslant2$，

解得a≥3，

所以a的最小值为3．

故选：C．

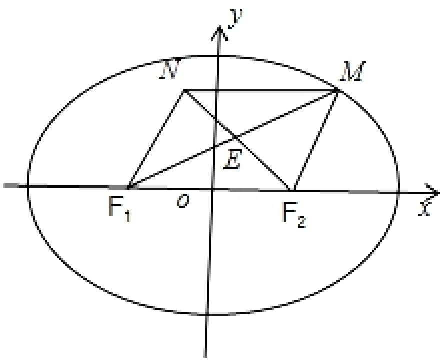
8．已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$M$为$E$上一点．若$\angle MF_1F_2=\frac{\pi}{6}$，$|\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_2M}|=|\overrightarrow{F_1F_2}|$，则$E$的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　　　C．$\sqrt{2}-1$　　　　D．$\sqrt{3}-1$

解：如图所示，以F_2F_1，F_2M为邻边作平行四边形F_1F_2MN，对角线F_1M，F_2N交于点E，

则$\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_2M}=\overrightarrow{F_2N}$，所以$|F_2N|=|F_1F_2|=2c$，

则$|F_2E|=c$，



则在三角形F_1F_2E中，$\angle F_2F_1M=\angle F_2F_1E=\frac{\pi}{6}$，

由余弦定理可得：$|F_2E|^2=|F_1E|^2+|F_1F_2|^2-2|F_1E||F_1F_2|\cos\angle F_2F_1E$，

即$c^2=|F_1E|^2+4c^2-2\times|F_1E|\times 2c\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，整理可得：$|F_1E|^2-2\sqrt{3}c|F_1E|+3c^2=0$，

解得$|F_1E|=\sqrt{3}c$，所以$|MF_1|=2\sqrt{3}c$，且由勾股定理可得$F_1E\perp F_2E$，

又E为MF_1的中点，则三角形F_1F_2M为等腰三角形，所以$|MF_2|=|F_1F_2|=2c$，

由椭圆的定义可得：$|MF_1|+|MF_2|=2\sqrt{3}c+2c=2a$，

解得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，

故选：B．

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分。

9．已知曲线E的方程为$mx^2+ny^2=1$（$mn\neq 0$），则E可能是（　　）

A．圆　　　　B．椭圆　　　　C．双曲线　　　　D．抛物线

解：当$m=n>0$时，曲线E的方程为$mx^2+ny^2=1$表示圆；