高中数学：函数模型及其应用

—— 知识点——

1．三种函数模型性质的比较

函数 性质	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=x^n(n>0)$
在区间$(0,+\infty)$上的增减性	单调__递增__	单调__递增__	单调__递增__
增长速度	越来越快	越来越慢	相对平稳

2.几种常见的函数模型

函数模型	函数解析式
一次函数模型	$f(x)=ax+b$（a，b 为常数，$a\neq 0$）
二次函数模型	$f(x)=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）
指数函数模型	$f(x)=ba^x+c$（a，b，c 为常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$，$b\neq 0$）
对数函数模型	$f(x)=b\log_a x+c$（a，b，c 为常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$，$b\neq 0$）
幂函数模型	$f(x)=ax^n+b$（a，b，n 为常数，$a\neq 0$，$n\neq 0$）

3．实际问题中的函数建模

<table>
<tr><td colspan="2">概念</td><td>把实际问题表达的数量变化规律用函数关系刻画出来的方法叫作函数建模</td></tr>
<tr><td rowspan="4">解题步骤</td><td>阅读审题</td><td>分析出已知什么，求什么，从中提炼出相应的数学问题</td></tr>
<tr><td>数学建模</td><td>弄清题目中的已知条件和数量关系，建立函数关系式</td></tr>
<tr><td>解答模型</td><td>利用数学方法得出函数模型的数学结果</td></tr>
<tr><td>解释模型</td><td>将数学问题的结果转译成实际问题作出答案</td></tr>
</table>

▸ **链接教材**

1．[教材改编] 函数模型 $y=0.25x$，$y=\log_2x+1$，$y=1.002^x$，随着 x 的增大，增长速度的大小关系是________.

[答案] $y=1.002^x$大于$y=0.25x$的增长速度，$y=0.25x$大于$y=\log_2x+1$的增长速度

[解析] 根据指数函数、幂函数、对数函数的增长速度关系可得.

2．[教材改编] 一辆汽车在某段路程中的行驶速率与时间的关系如图1-11-1所示，直线$t=t_0(0\leqslant t_0\leqslant 5)$左侧部分阴影图形的面积的实际意义是_________.

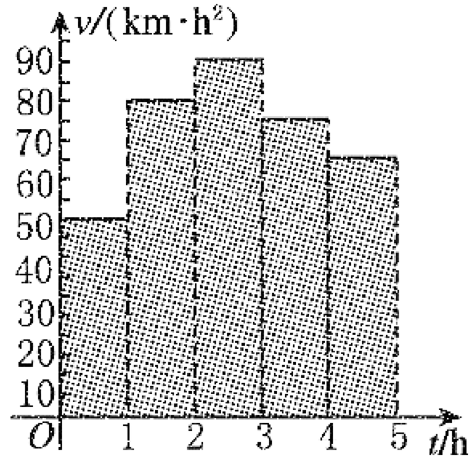

图1-11-1

[答案]在[0，t_0]时间段内汽车行驶的里程

[解析]根据速率与时间的关系可得.

3．[教材改编] 要建造一个容积为1200 m^3，深为6 m的长方体无盖蓄水池，池壁的造价是95元/m^2，池底的造价是135元/m^2，则该蓄水池的最低造价是_________元.

[答案] $22\,800\sqrt{2}+27\,000$

[解析] 设蓄水池的总造价为 y 元，水池长为 x m，则 $y=12x+\frac{2400}{x}\times 95+\frac{1200}{6}\times 135\geqslant 2\sqrt{12x\times\frac{2400}{x}\times 95}+200\times 135=22\,800\sqrt{2}+27\,000$，当且仅当 $12x=\frac{2400}{x}$，即 $x=10\sqrt{2}$时 y 取得最小值.

▶ **易错问题**

4．$y=2^x$与$y=x^2$的变化趋势在$(0，+\infty)$上，不等式$x^2<2^x$的解集是__________.

[答案] $(0，2)\cup(4，+\infty)$

[解析] 画出两个函数的图像可知.

5．实际应用题中函数的定义域

一枚炮弹发射后，其升空高度h与时间t的函数关系为$h=130t-5t^2$，则该函数的定义域是________.

[答案] $[0，26]$

[解析] 由 $h\geq 0$，解得 $0\leq t\leq 26$，故其定义域为$[0，26]$.

6．分段函数模型(大量的应用题要使用分段函数模型)

已知A，B两地相距150千米，某人开汽车以60千米/小时的速度从A地到达B地，在B地停留1小时后再以50千米/小时的速度返回A地，则汽车离A地的距离S(千米)表示为时间t(小时)的函数解析式是________________.

[答案] $S=\begin{cases}60t\ (0\leq t\leq 2.5),\\ 150\ (2.5<t\leq 3.5),\\ 150-50(t-3.5)\ (3.5<t\leq 6.5)\end{cases}$

[解析] 当$0\leqslant t\leqslant 2.5$时，$S=60t$；当$2.5<t\leqslant 3.5$时，$S=150$；当$3.5<t\leqslant 6.5$时，$S=150-50(t-3.5)$.

▸ 通性通法

7．函数模型的关键是找出自变量

一矩形铁皮的长为8 cm，宽为5 cm，在四个角上截去四个相同的小正方形，折叠铁皮制成一个无盖的小盒子，则盒子容积最大是__________cm^3.

[答案] 18

[解析] 设小正方形的边长为 x cm，则盒子底面长为$(8-2x)$ cm，宽为$(5-2x)$cm，故容积 $V=(8-2x)\cdot(5-2x)x=4x^3-26x^2+40x$，$x\in 0,\frac{5}{2}$，$V'=12x^2-52x+40$，由 $V'=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\frac{10}{3}$(舍去). 当 $x\in(0,1)$时, $V'(x)>0$, 当 $x\in 1,\frac{5}{2}$时, $V'(x)<0$, 所以当 $x\in(0，1)$时，$V(x)$单调递增，当 $x\in 1，\frac{5}{2}$时，$V(x)$单调递减. 所以当 $x=1$ 时，$V(x)$取得最大值，且 $V_{max}=V(1)=18(cm^3)$.

8．分段函数的最值是各段最值的最值

函数 $y=\begin{cases}\sin x，x\in[-\pi，0)，\\ x^2-4x+4，x\in[0，4]\end{cases}$ 的最小值和最大值分别是________．

[答案] -1，4

[解析] 在$[-\pi，0)$上函数的最大值为 0，最小值为-1，在$[0，4]$上函数的最小值为 0，最大值为 4.故函数的最小值为-1，最大值为 4.

► 探究点一　一次、二次函数模型

例 1　某旅行社组团旅游的飞机团票如下：①若每团人数在 30 人或 30 人以下，飞机票每张收费 900 元；②若每团人数多于 30 人，则给予优惠，每多 1 人，机票每张减少 10 元，直到达到规定人数 75 人为止．每团乘飞机，旅行社只需一次性付给航空公司包机费 15 000 元．

(1)写出每张飞机票的价格 y(元)关于人数 x(人)的函数关系式．

(2)每团人数为多少时，旅行社可获得最大利润？

[思路点拨]分段建模，然后利用函数性质求解该函数的最大值．

解：(1)由题得 $0<x\leqslant 75$，

则 $y=\begin{cases}900, & 0<x\leqslant 30,\\ 900-10(x-30), & 30<x\leqslant 75,\end{cases}$

即 $y=\begin{cases}900, & 0<x\leqslant 30,\\ 1200-10x, & 30<x\leqslant 75.\end{cases}$

(2)设旅行社获利 L 元，

则 $L=\begin{cases}900x-15\,000, & 0<x\leqslant 30,\\ (1200-10x)x-15\,000, & 30<x\leqslant 75,\end{cases}$

即 $L=\begin{cases}900x-15\,000, & 0<x\leqslant 30,\\ -10(x-60)^2+21\,000, & 30<x\leqslant 75.\end{cases}$

当 $x\in(0，30]$时，$L=900x-15\ 000$ 为单调增函数，所以当 $x=30$ 时，L 取得最大值，此时 $L_{max}=12\ 000$；当 $x\in(30，75]$时，$L=-10(x-60)^2+21\ 000$ 在 $x=60$ 时，L 取得最大值，此时 $L_{max}=21\ 000$.故当 $x=60$ 时，旅行社可获得最大利润.

[总结反思] (1)函数建模的关键是找到一个影响求解目标的变量，以其为自变量表达出其他需要的量，综合各种条件建立函数模型.

(2)在实际问题的函数模型中，要特别注意函数的定义域，它是由实际问题决定的，不是由建立的函数解析式决定的.

变式题 某企业采用新工艺，把生产中排放的二氧化碳转化为一种可利用的化工产品．已知该企业每月的处理量最少为400吨，最多为600吨，月处理成本y(元)与月处理量x(吨)之间的函数关系可近似地表示为$y=\frac{1}{2}x^2-200x+80\,000$，且每处理一吨二氧化碳得到的化工产品的价值为100元．

(1)该企业每月处理量为多少吨时，才能使每吨的平均处理成本最低？

(2)该企业每月能否获利？如果获利，求出最大利润；如果不获利，则国家每月至少需要补贴多少元才能使该企业不亏损？

解：(1)由题意可知，二氧化碳每吨的平均处理成本为$\frac{y}{x}=\frac{1}{2}x+\frac{80\ 000}{x}-200\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}x\cdot\frac{80\ 000}{x}}-200=200$，

当且仅当$\frac{1}{2}x=\frac{80\ 000}{x}$，即 $x=400$ 时等号成立，

故每月处理量为 400 吨时，才能使每吨的平均处理成本最低，最低成本为 200 元.

(2)设该企业每月获利 S 元，则

$$S=100x-y=100x-\frac{1}{2}x^2-200x+80\ 000=-\frac{1}{2}x^2+300x-80\ 000=-\frac{1}{2}(x-300)^2-35\ 000.$$

因为 $400\leqslant x\leqslant 600$，所以当 $x=400$ 时，S 有最大值$-40\ 000$.故该企业不获利，且需要国家每月至少补贴 40 000 元，才能不亏损.