安徽省安庆市第七中学2023-2024学年高二上学期期中考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．如果$A\cdot C<0$且$B\cdot C<0$，那么直线$Ax+By+C=0$不通过（　）

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

2．若$a\in\left\{-2,-1,0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$，则方程$x^2+y^2+ax+2ay+2a^2+a-1=0$表示的圆的个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P是C_1D_1的中点，且$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AA_1}$，则实数$x+y$的值为（　）

A．$-\frac{3}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

4．唐代诗人李颀的诗《古从军行》开关两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河”，诗中隐含着一个有趣的数学问题—“将军饮马”问题，即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回到军营，怎样走才能使总路程最短？在平面直角坐标系中，设军营所在的位置为$B(-2,0)$，若将军从山脚下的点$A(3,0)$处出发，河岸线所在直线方程为$x+y=4$，则“将军饮马”的最短总路程为（　）

A．$\frac{\sqrt{145}}{3}$　　B．$\sqrt{37}$　　C．$\frac{\sqrt{135}}{3}$　　D．$\frac{16}{3}$

5．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是C_1D_1的中点，则异面直线DE与A_1C_1所成角的余弦值为（　）

A．$-\frac{1}{20}$　　B．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{1}{20}$

6．若直线$l: kx-y+3k=0$与曲线$C:\sqrt{1-x^2}=y-1$有两个不同的交点，则实数k的取值范围是（　）

A．$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$　　B．$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$　　C．$\left(0,\frac{3}{4}\right)$　　D．$\left(0,\frac{3}{4}\right]$

7．已知椭圆$x^2+4y^2=12$的左、右焦点分别为F_1、F_2，点P在椭圆上，线段PF_1的中点在y轴上，则｜PF_1｜是｜PF_2｜的（　）

A．3倍　　B．4倍　　C．5倍　　D．7倍

8．已知实数x,y满足方程$x^2+y^2-4x-2y+4=0$，则下列说法错误的是（　）

A．$\frac{y}{x}$的最大值为$\frac{4}{3}$

B．$\frac{y}{x}$的最小值为0

C．x^2+y^2的最大值为$\sqrt{5}+1$

D．$x+y$的最大值为$3+\sqrt{2}$

二、多选题

9．已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$与椭圆$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$，则（　）

A．$k<9$　　B．短轴长相等　　C．焦距相等　　D．离心率相等

10．关于空间向量，以下说法正确的是（　）

A．非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$

B．若对空间中任意一点O，有$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，则$P$，A，$B$，$C$四点共面

C．设$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$是空间中的一组基底，则$\{\vec{a}-\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{c}\}$也是空间的一组基底

D．若空间四个点P，A，B，C，$\overrightarrow{PC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{PB}$，则A，$B$，$C$三点共线

11．设有一组圆C_k：$(x-k)^2+(y-k)^2=4\ (k\in \mathrm{R})$，下列命题正确的是（　）

A．不论k如何变化，圆心C始终在一条直线上

B．所有圆C_k均不经过点$(3,0)$

C．经过点$(2,2)$的圆C_k有且只有一个

D．所有圆的面积均为4π

12．已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右两个焦点分别为$F_1,F_2$，长轴端点分别为$A$，$B$，点$P$为椭圆上一动点，$M(1,1)$，则下列结论正确的有（　）

A．$\triangle PF_1F_2$的最大面积为$2\sqrt{3}$

B．若直线PA,PB的斜率为k_1,k_2，则$k_1\cdot k_2=-\frac{3}{4}$

C．存在点P使得$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$

D．$|PM|+|PF_1|$的最大值为5

三、填空题

13．若椭圆$\frac{x^2}{9}+y^2=1$上一点A到焦点F_1的距离为$2,B$为AF_1的中点，O是坐标原点，则$|OB|=$______.

14．设$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$是空间两个不共线的非零向量，已知$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{e_1}+k\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}$，

$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$，且 A,B,D 三点共线，则实数 k 的值为______.

15．已知直线 l：$(m+1)x-2(m+2)y+3m+1=0$ 恒过点 P，点 Q 在直线 $x+y+1=0$ 上，

则 $|PQ|$ 的最小值为________.

16．直线 $ax+y+2=0$ 与圆 C：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$ 相交于 A，B 两点，若∠ACB＝

120°，则 $a=$___.

四、解答题

17．已知两直线 l_1：$2mx+(3-m)y+1=0$，l_2：$2x+2my+m=0$.

(1)求 l_1 和 l_2 平行时 m 的值；

(2)求 l_1 和 l_2 垂直时 m 的值.

18．已知空间三点 $A(-2,0,2)$，$B(-1,1,2)$，$C(-3,0,4)$，设 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

(1)求 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角的余弦值；

(2)若 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 的夹角是钝角，求 k 的取值范围.

19．已知线段 AB 的端点 B 的坐标是 $\left(6,5\right)$，端点 A 在圆 $C_1:\left(x-4\right)^2+\left(y-3\right)^2=4$ 上运动.

(1)求线段 AB 的中点 P 的轨迹 C_2 的方程：

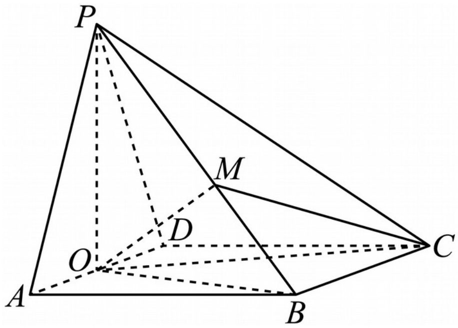
(2)设圆 C_1 与曲线 C_2 的交点为 M、N，求线段 MN 的长.

20．在平面直角坐标系中，曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

（1）求圆 C 的方程；

（2）若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$，求 a 的值.

21．如图，四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是菱形，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，M是棱PB上的点，O是AD中点，且$PO\perp$底面$ABCD$，$OP=\sqrt{3}OA$.



（1）求证：$BC\perp OM$；

（2）若$PM=\frac{2}{3}PB$，求二面角$B-OM-C$的余弦值.

22．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点是$F\left(2\sqrt{3},0\right)$，过点$F$的直线交椭圆$C$于$A,B$两点，若线段$AB$中点$Q$的坐标为$\left(\frac{8\sqrt{3}}{7},-\frac{6}{7}\right)$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)已知$P(0,-b)$是椭圆C的下顶点，如果直线$y=kx+1\left(k\neq 0\right)$交椭圆$C$于不同的两点

M,N，且M,N都在以P为圆心的圆上，求k的值.

参考答案：

1．C

【分析】化简直线方程为直线的斜截式方程，结合斜率和在y轴上的截距，即可求解.

【详解】因为$A\cdot C<0$，且$B\cdot C<0$，所以A、B、C均不为零，

由直线方程$Ax+By+C=0$，可化为$y=-\frac{A}{B}x+(-\frac{C}{B})$，

因为$A\cdot C<0$，且$B\cdot C<0$，可得$-\frac{A}{B}<0$，$-\frac{C}{B}>0$，

所以直线经过第一、二、四象限，所以不经过第三象限.

故选：C.

2．C

【分析】由圆的一般方程表示圆的条件计算即可.

【详解】由题意可知：$a^2+(2a)^2-4\left(2a^2+a-1\right)=-3a^2-4a+4>0\Rightarrow(3a-2)(a+2)<0$，

解之得$-2<a<\frac{2}{3}$，

又$a\in\left\{-2,-1,0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$，所以$a\in\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$.

故选：C

3．D

【解析】化简得到$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，得到$x=\frac{1}{2}$，$y=1$，得到答案.

【详解】$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AA_1}$，

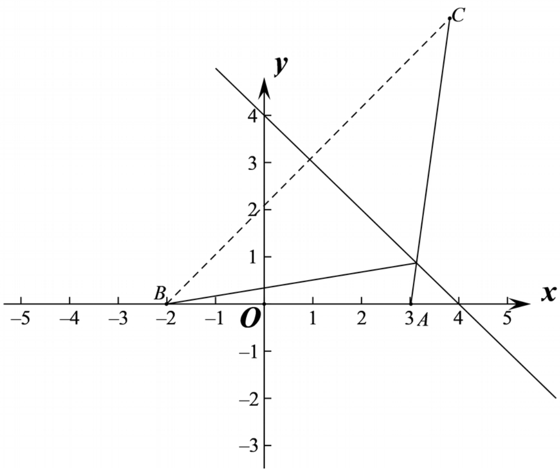
故$x=\frac{1}{2}$，$y=1$，$x+y=\frac{3}{2}$.

故选：D.

【点睛】本题考查了空间向量的运算，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

4．B

【分析】先求点$B(-2,0)$关于直线$x+y=4$对称的点$C(a,b)$，再根据两点之间线段最短，即可得解.

【详解】

如图，设$B(-2,0)$关于直线$x+y=4$对称的点为$C(a,b)$，

则有$\begin{cases}\dfrac{a-2}{2}+\dfrac{b}{2}=4\\ \dfrac{b}{a+2}=1\end{cases}$，可得$\begin{cases}a=4\\ b=6\end{cases}$，可得$C(4,6)$，

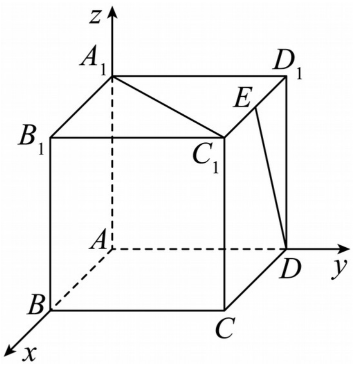
依题意可得“将军饮马”的最短总路程为AC，

此时$AC=\sqrt{(4-3)^2+(6-0)^2}=\sqrt{37}$，

故选：B.

5．C

【分析】建立空间直角坐标系，利用坐标法可得异面直线夹角.

【详解】

设正方体棱长为2，

如图建立空间直角坐标系，则$A_1\left(0,0,2\right)$，$C_1\left(2,2,2\right)$，$D\left(0,2,0\right)$，$D_1\left(0,2,2\right)$，

$\because E$是C_1D_1中点，

$\therefore E\left(1,2,2\right)$，

则$\overrightarrow{A_1C_1}=\left(2,2,0\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(1,0,2\right)$，

所以$\cos\left\langle\overrightarrow{A_1C_1},\overrightarrow{DE}\right\rangle=\dfrac{2+0+0}{\sqrt{2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

所以异面直线A_1C_1与DE夹角余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

故选：C.

6．B

【分析】根据直线所过的定点，结合直线与圆的切线性质，利用数形结合思想进行求解即可.

【详解】直线$l:kx-y+3k=0$即$k\left(x+3\right)-y=0$，恒过定点$(-3,0)$，

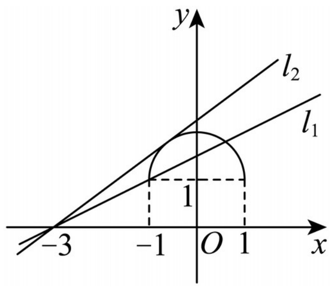
曲线$C:\sqrt{1-x^2}=y-1$即$x^2+\left(y-1\right)^2=1\left(y\geq1\right)$表示以点$(0,1)$为圆心，半径为1，

且位于直线$y=1$上方的半圆（包括点$(-1,1)$，$(1,1)$），

当直线l经过点$(-1,1)$时，l与曲线C有两个不同的交点，此时$k=\frac{1-0}{-1+3}=\frac{1}{2}$，直线记为$l_1$；

当l与半圆相切时，由$\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，得$k=\frac{3}{4}$，切线记为$l_2$，

分析可知当$\frac{1}{2}\le k<\frac{3}{4}$时，$l$与曲线$C$有两个不同的交点，即实数$k$的取值范围是$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.



故选：B.

7．D

【解析】由已知得到焦点坐标，设$P(x,y)$，根据中点坐标公式得到横坐标等于零得到P点坐标，再利用两点间的距离公式可得答案.

【详解】由椭圆$x^2+4y^2=12$得，$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$，$a^2=12,b^2=3,c^2=a^2-b^2=9$，

所以$F_1(-3,0)$，$F(3,0)$，设$P(x,y)$，则线段PF_1的中点坐标为$\left(\frac{x-3}{2},\frac{y}{2}\right)$，

因为线段PF_1的中点在y轴上，所以$\frac{x-3}{2}=0$，所以$x=3$，所以$\frac{3^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$，

解得$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，当$P\left(3,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$|PF_1|=\sqrt{(3+3)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$，

$|PF_2|=\sqrt{(3-3)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$|PF_1|=7|PF_2|$，

当$P\left(3,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$|PF_1|=\sqrt{(3+3)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$，

$|PF_2|=\sqrt{(3-3)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$|PF_1|=7|PF_2|$，

故选：D.

8．C

【分析】对于ABD，结合点到直线的距离公式，即可求解，对于C，结合两点之间的距离公式，即可求解.

【详解】$\because$实数x，y满足方程$x^2+y^2-4x-2y+4=0$，

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=1$，

对于ABD，令$y=kx$，$x+y=a$，

则两条直线都与圆有公共点，

$\therefore \frac{|2+1-a|}{\sqrt{2}}\le 1$，$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\le 1$，解得$3-\sqrt{2}\le a\le 3+\sqrt{2}$，$0\le k\le \frac{4}{3}$，

故$x+y$的最大值为$3+\sqrt{2}$，$\frac{y}{x}=k$的最大值为$\frac{4}{3}$，故ABD正确，

对于C，原点到圆心的距离为$d=\sqrt{5}$，

则圆上的点到原点的距离为$[\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1]$，

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}\le \sqrt{5}+1$，

$\therefore x^2+y^2\le 6+2\sqrt{5}$，

故x^2+y^2的最大值为$6+2\sqrt{5}$，故C错误.

故选：C

9．AC

【分析】分别对两个椭圆进行分析，得到对应的短轴长，焦距，离心率等，即可得出结论.

【详解】由题意，在$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$中，有$a=5$，$b=3$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$，

∴短半轴为3，长半轴为5，焦距为$4\times2=8$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，

在$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$中，有$a=\sqrt{25-k}$，$b=\sqrt{9-k}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-k-(9-k)}=4$，

∴长半轴为$\sqrt{25-k}$，短半轴为$\sqrt{9-k}$，焦距为$4\times2=8$，

$\begin{cases}25-k>0\\9-k>0\end{cases}$，解得：$k<9$，离心率$e=\frac{4}{\sqrt{25-k}}$，

∴AC 正确，BD 错误.

故选：AC.

10．ABD

【分析】由向量垂直的性质判断A；由共面向量定理判断B；由向量加法法则判断C；由共线向量定理判断D.

【详解】对于A，非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$，正确；

对于B，若对空间中任意一点O，有$\overline{OP}=\frac{1}{6}\overline{OA}+\frac{1}{3}\overline{OB}+\frac{1}{2}\overline{OC}$，

∵$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$，∴$P$，$A$，$B$，$C$四点共面，故正确；

对于C，∵$\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{a}+\vec{c})$

∴$\vec{a}-\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{c}$共面，不可以构成空间的一组基底，故错误；