第十一章　计数原理、概率、随机变量及其分布

内容概览

必备知识·逐点夯实

核心考点·分类突破

【课标解读】

【课程标准】

1.理解取有限个值的离散型随机变量及其分布列的概念.

2.理解并会求离散型随机变量的数字特征.

【核心素养】

数据分析、数学运算、逻辑推理.

【命题说明】

考向考法	离散型随机变量的分布列是高考考查重点,常以实际问题为背景,与排列组合结合在一起交汇命题,各种题型均有考查.
预测	预计2025年高考仍会在离散型随机变量、分布列出题,其中期望与方差的应用命题更加灵活、多变.

必备知识 · 逐点夯实

返回

知识梳理·归纳

1.离散型随机变量

一般地,对于随机试验样本空间Ω中的每个样本点ω,都有__**唯一**__的实数$X(\omega)$与之对应,我们称X为随机变量;可能取值为有限个或可以一一列举的随机变量称为离散型随机变量.

2.离散型随机变量的分布列

一般地,设离散型随机变量X的可能取值为$x_1,x_2,\dots,x_n$,称X取每一个值x_i的概率$P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\dots,n$为$X$的概率分布列,简称分布列.

3.离散型随机变量的分布列的性质

①p_i__$\geq$__$0,i=1,2,\dots,n$;

②$p_1+p_2+\dots+p_n=$__**1**__.

微点拨

分布列性质的两个作用

(1)利用分布列中各事件概率之和为1可求参数的值.

(2)随机变量X所取的值分别对应的事件是两两互斥的,利用这一点可以求相关事件的概率.

4.离散型随机变量的均值与方差

一般地,若离散型随机变量X的分布列为

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

(1)均值:$E(X)=$__$x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n$__$=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$为随机变量$X$的均值或数学期望,数学期望简称期望.它反映了离散型随机变量取值的__平均水平__.

(2)方差

$D(X)=(x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\dots+(x_n-E(X))^2p_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$为随机变量$X$的方差,并称$\sqrt{D(X)}$为随机变量$X$的__**标准差**__,记为$\sigma(X)$,它们都可以度量随机变量取值与其均值的__**偏离程度**__.

微点拨

(1)$E(X)$是一个实数,由X的分布列唯一确定.随机变量X是可变的,可取不同的值,$E(X)$描述X取值的平均状态.

(2)变量的方差与标准差都反映了随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度,其中标准差与随机变量本身具有相同的单位.

5.均值与方差的性质

(1)$E(aX+b)=$ $\underline{aE(X)+b}$.

(2)$D(aX+b)=$ $\underline{a^2D(X)}$ $(a,b$为常数).

(3)$E(X_1+X_2)=$ $\underline{E(X_1)+E(X_2)}$.

(4)$D(X)=$ $\underline{E(X^2)-(E(X))^2}$.

(5)若X_1,X_2相互独立,则 $\underline{E(X_1X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)}$.

基础诊断·自测

类型	辨析	改编	易错	高考
题号	1	2	4	3

1.(思考辨析)(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)在离散型随机变量的分布列中,随机变量取各个值的概率之和可以小于1.(×)

提示:离散型随机变量所有取值的并事件是必然事件,故各概率之和等于1.

(2)离散型随机变量的各个可能值表示的事件是彼此互斥的.(√)

(3)如果随机变量X的分布列由下表给出,

X	2	5
P	0.3	0.7

则它服从两点分布.(×)

提示: X的取值不是0,1,故不是两点分布.

(4)方差或标准差越小,则随机变量的偏离程度越小.(√)

2.(选择性必修三P63例1改编)在篮球比赛中,罚球命中1次得1分,不中得0分.如果某篮球运动员罚球命中的概率为0.8,那么他罚球1次的得分X的均值为(   )

A.0.2　B.0.4　C.0.8　D.1

【解析】选C.某篮球运动员罚球1次的得分为X,X的取值可能为0,1,

$P(X=0)=1-0.8=0.2$,

$P(X=1)=0.8$,$E(X)=0\times0.2+1\times0.8=0.8$.

3.(2020·全国*III*卷)在一组样本数据中,1,2,3,4出现的频率分别为p_1,p_2,p_3,p_4,且$\sum_{i=1}^{n} p_i=1$,则下面四种情形中,对应样本的标准差最大的一组是(　　)

A.$p_1=p_4=0.1,p_2=p_3=0.4$

B.$p_1=p_4=0.4,p_2=p_3=0.1$

C.$p_1=p_4=0.2,p_2=p_3=0.3$

D.$p_1=p_4=0.3,p_2=p_3=0.2$

【解析】选B.对于A,该组数据的平均数为$(1+4)\times0.1+(2+3)\times0.4=2.5$,

方差为$(1-2.5)^2\times0.1+(2-2.5)^2\times0.4+(3-2.5)^2\times0.4+(4-2.5)^2\times0.1=0.65$;

对于B,该组数据的平均数为$(1+4)\times0.4+(2+3)\times0.1=2.5$,

方差为$(1-2.5)^2\times0.4+(2-2.5)^2\times0.1+(3-2.5)^2\times0.1+(4-2.5)^2\times0.4=1.85$;

对于C,该组数据的平均数为$(1+4)\times0.2+(2+3)\times0.3=2.5$,

方差为$(1-2.5)^2\times0.2+(2-2.5)^2\times0.3+(3-2.5)^2\times0.3+(4-2.5)^2\times0.2=1.05$;

对于D,该组数据的平均数为$(1+4)\times0.3+(2+3)\times0.2=2.5$,

方差为$(1-2.5)^2\times0.3+(2-2.5)^2\times0.2+(3-2.5)^2\times0.2+(4-2.5)^2\times0.3=1.45$.

所以B这一组的标准差最大.

4.(均值性质应用错误)已知随机变量X的分布列如表:

X	-1	0	1
P	1	1	1

若$Y=2X+3$,则$E(Y)$的值为$\underline{\quad \frac{7}{3} \quad}$.

【解析】$E(X)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$,

则$E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=-\frac{2}{3}+3=\frac{7}{3}$.

核心考点 · 分类突破

返回

考点一 离散型随机变量分布列的性质

[例1](1)随机变量X的概率分布规律为$P(X=n)=\frac{a}{n(n+1)}(n=1,2,3,4)$,其中$a$为常数,则$P(\frac{5}{4}<X<\frac{13}{4})$的值为(　　)

A.$\frac{2}{3}$　　B.$\frac{3}{4}$　　C.$\frac{4}{5}$　　D.$\frac{5}{16}$

【解析】选D.因为$P(X=n)=\frac{a}{n(n+1)}(n=1,2,3,4)$,所以$\frac{a}{2}+\frac{a}{6}+\frac{a}{12}+\frac{a}{20}=1$,所以$a=\frac{5}{4}$.

所以$P(\frac{5}{4}<X<\frac{13}{4})=P(X=2)+P(X=3)=\frac{5}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{4}\times\frac{1}{12}=\frac{5}{16}$.

(2)设X是一个离散型随机变量,其分布列为

X	-1	0	1
P	1	$2-3q$	q^2

则q的值为(　　)

A. 1　　　　B. $\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{6}$

C. $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}$　　　　D. $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{33}}{6}$

【解析】选C.由分布列的性质知$\begin{cases} 0\le 2-3q\le \frac{2}{3}, \\ 0\le q^2\le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{3}+2-3q+q^2=1, \end{cases}$ 解得$q=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}$.

解题技法

离散型随机变量分布列的性质的应用

(1)利用"概率之和为1"可以求相关参数的值.

(2)利用"在某个范围内的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和"求某些特定事件的概率.

(3)可以根据性质判断所得分布列结果是否正确.

对点训练

1.若随机变量X的分布列为

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

则当$P(X<a)=0.8$时,实数a的取值范围是(　　)

A.$(-\infty,2]$　　B.$[1,2]$

C.$(1,2]$　　D.$(1,2)$

【解析】选C.由随机变量X的分布列知,$P(X<1)=0.5$,$P(X<2)=0.8$,故当$P(X<a)=0.8$时,实数a的取值范围是$(1,2]$.

2.设随机变量X满足$P(X=i)=\frac{k}{2^i}(i=1,2,3)$,则$k=$ $\underline{\quad\frac{8}{7}\quad}$;$P(X\geq 2)=$ $\underline{\quad\frac{3}{7}\quad}$.

【解析】由已知得随机变量X的分布列为

X	1	2	3
P	k	k	k

所以$\frac{k}{2}+\frac{k}{4}+\frac{k}{8}=1$,所以$k=\frac{8}{7}$.

所以随机变量X的分布列为

X	1	2	3
P	4	2	1

所以$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$.

3.随机变量X的分布列如下:

X	-1	0	1
P	a	b	c

其中a,b,c成等差数列,则$P(|X|=1)=$___$\frac{2}{3}$___,公差d的取值范围是___$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$___.

【解析】因为a,b,c成等差数列,所以$2b=a+c$.

又$a+b+c=1$,所以$b=\frac{1}{3}$,所以$P(|X|=1)=a+c=\frac{2}{3}$.

又$a=\frac{1}{3}-d,c=\frac{1}{3}+d$,

根据分布列的性质,得$0\le\frac{1}{3}-d\le\frac{2}{3},0\le\frac{1}{3}+d\le\frac{2}{3}$,所以$-\frac{1}{3}\le d\le\frac{1}{3}$.

【加练备选】

设离散型随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.2	0.1	0.1	0.3	m

(1)求$2X+1$的分布列;

【解析】(1)由分布列的性质知,$0.2+0.1+0.1+0.3+m=1$,得$m=0.3$.

列表为

X	0	1	2	3	4
$2X+1$	1	3	5	7	9

从而$2X+1$的分布列为

$2X+1$	1	3	5	7	9
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

设离散型随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.2	0.1	0.1	0.3	m

(2)求随机变量$\eta=|X-1|$的分布列.

【解析】(2)由(1)知$m=0.3$,列表为

X	0	1	2	3	4
η	1	0	1	2	3

所以$P(\eta=1)=P(X=0)+P(X=2)=0.2+0.1=0.3$,$P(\eta=0)=P(X=1)=0.1$,

$P(\eta=2)=P(X=3)=0.3$,$P(\eta=3)=P(X=4)=0.3$,故$\eta=|X-1|$的分布列为

η	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.3	0.3

考点二 均值与方差的简单计算

[例2](1)(多选题)已知随机变量X的分布列为

X	-1	0	1
P	1	m	$3m$

下列结论正确的有(　　)

A. $m=\frac{1}{6}$　　B. $E(X)=\frac{1}{6}$

C. $E(2X-1)=\frac{1}{3}$　　D. $D(X)=\frac{29}{36}$

【解析】选ABD.由分布列的性质得,$\frac{1}{3}+4m=1$,解得$m=\frac{1}{6}$,故A正确;

$E(X)=-1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,故B正确;$E(2X-1)=2E(X)-1=-\frac{2}{3}$,故C不正确;

$D(X)=\frac{1}{3}\times(-1-\frac{1}{6})^2+\frac{1}{6}\times(0-\frac{1}{6})^2+\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{6})^2=\frac{29}{36}$,故D正确.

(2)(多选题)设离散型随机变量X的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	q	0.4	0.1	0.2	0.2

若离散型随机变量Y满足$Y=2X+1$,则下列结果正确的有(　　)

A.$q=0.1$

B.$E(X)=2,D(X)=1.4$

C.$E(X)=2,D(X)=1.8$

D.$E(Y)=5,D(Y)=7.2$

【解析】选ACD.因为$q+0.4+0.1+0.2+0.2=1$,所以$q=0.1$,故A正确;

又$E(X)=0\times0.1+1\times0.4+2\times0.1+3\times0.2+4\times0.2=2$,$D(X)=$

$(0-2)^2\times0.1+(1-2)^2\times0.4+(2-2)^2\times0.1+(3-2)^2\times0.2+(4-2)^2\times0.2=1.8$,故C正确,B错误;

因为$Y=2X+1$,所以$E(Y)=2E(X)+1=5$,$D(Y)=4D(X)=7.2$,故D正确.

(3)已知随机变量X的分布列如表:

X	a	2	3	4
P	1	b	1	1

若$E(X)=2$,则$a=$____0____,$D(X)=$____$\frac{5}{2}$____.

【解析】由题意知,$\frac{1}{3}+b+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=1$,所以$b=\frac{1}{4}$.

又$E(X)=a\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{4}=2$,解得$a=0$,

所以$D(X)=(0-2)^2\times\frac{1}{3}+(2-2)^2\times\frac{1}{4}+(3-2)^2\times\frac{1}{6}+(4-2)^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$.