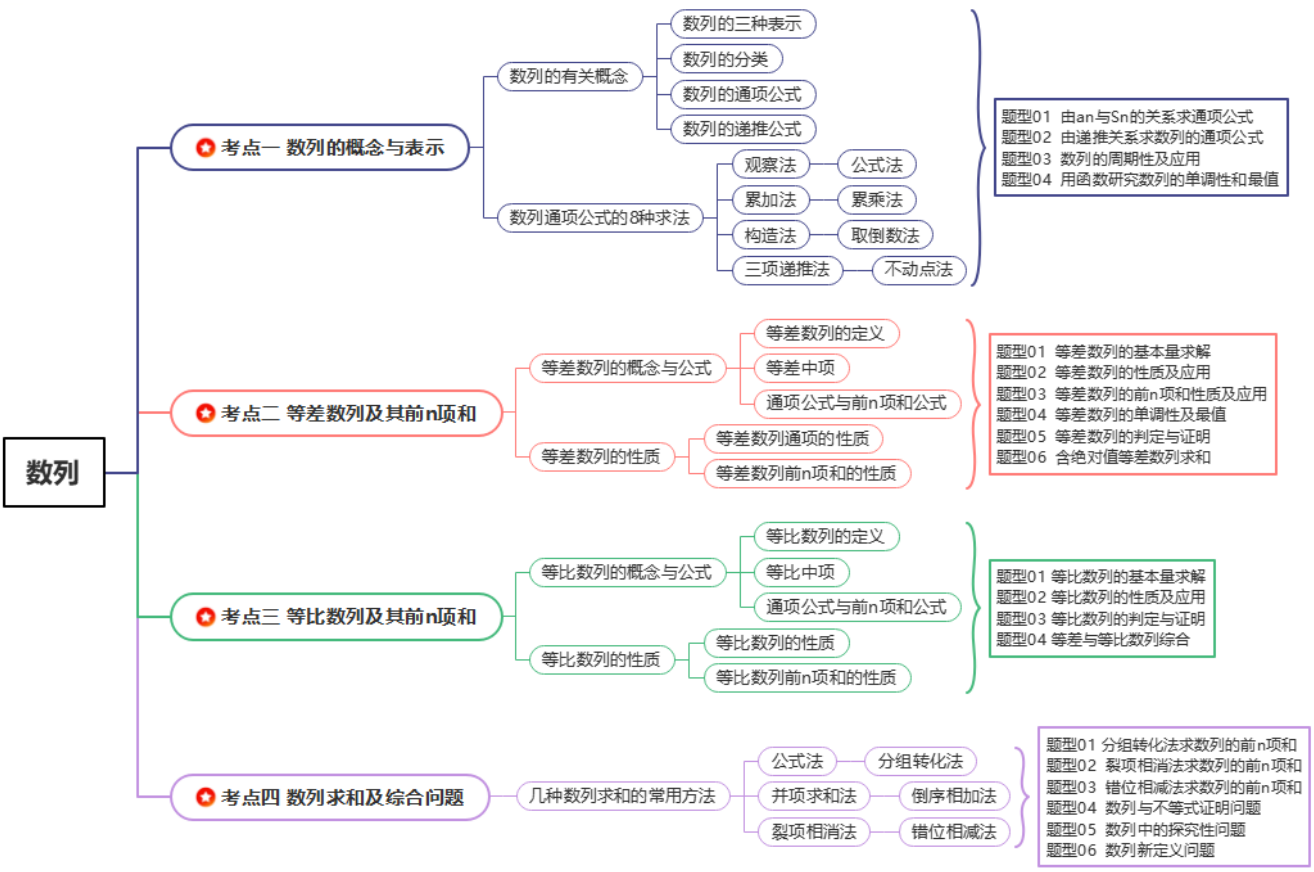
专题 04 数列

查补 考点大集合



查补 考点大过关

考点一：数列的概念与表示

核心提炼·查漏补缺

知识点 1　数列的有关概念

1、数列的三种表示：列表法、图象法和解析式法.

2、数列的分类

<table>
<tr><td>分类标准</td><td>类型</td><td colspan="2">满足条件</td></tr>
<tr><td rowspan="2">按项数分类</td><td>有穷数列</td><td colspan="2">项数有限</td></tr>
<tr><td>无穷数列</td><td colspan="2">项数无限</td></tr>
<tr><td></td><td>递增数列</td><td>$a_{n+1}>a_n$</td><td>其中 $n\in\mathbf{N}^*$</td></tr>
</table>

按项与项间的大小关系分类			
	递减数列	$a_{n+1} < a_n$	
	常数列	$a_{n+1} = a_n$	
按其他标准分类	有界数列	存在正数 M，使 $\|a_n\| \le M$	
	摆动数列	从第二项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列	
	周期数列	对 $n \in \mathbf{N}^*$，存在正整数常数 k，使 $a_{n+k} = a_n$	

3、数列的通项公式：如果数列$\{a_n\}$的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表达，那么这个公式叫做这个数列的通项公式.

4、数列的递推公式：如果已知数列$\{a_n\}$的首项(或前几项)，且任一项 a_n 与它的前一项 $a_{n-1}(n \ge 2)$ (或前几项)间的关系可用一个公式来表示，那么这个公式叫做数列的递推公式.

知识点 2　数列通项公式的求法

1、观察法：已知数列前若干项，求该数列的通项时，一般对所给的项观察分析，寻找规律，从而根据规律写出此数列的一个通项.

2、公式法

（1）使用范围：若已知数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系，求数列$\{a_n\}$的通项 a_n 可用公式 $a_n = \begin{cases} S_1 & ,(n=1) \\ S_n - S_{n-1}, & (n \ge 2) \end{cases}$ 构造两式作差求解.

（2）用此公式时要注意结论有两种可能，一种是“一分为二”，即分段式；另一种是“合二为一”，即 a_1 和 a_n 合为一个表达，（要先分 $n=1$ 和 $n \ge 2$ 两种情况分别进行运算，然后验证能否统一）.

3、累加法：适用于 $a_{n+1}=a_n+f(n)$，可变形为 $a_{n+1}-a_n=f(n)$

要点：利用恒等式 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})(n\ge2，n\in N^*)$求解

4、累乘法：适用于 $a_{n+1}=f(n)a_n$，可变形为$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$

要点：利用恒等式 $a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}(a_n\neq0，n\ge2，n\in N^*)$求解

5、构造法：对于不满足 $a_{n+1}=a_n+f(n)$，$a_{n+1}=f(n)a_n$ 形式的递推关系，常采用构造法

要点：对所给的递推公式进行变形构造等差数列或等比数列进行求解

类型一：形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ （其中 p,q 均为常数且 $p \ne 0$ ）型的递推式：

（1）若 $p=1$ 时，数列$\{a_n\}$为等差数列；

（2）若 $q=0$ 时，数列$\{a_n\}$为等比数列；

（3）若 $p \ne 1$ 且 $q \ne 0$ 时，数列$\{a_n\}$为线性递推数列，其通项可通过待定系数法构造等比数列来求．方法有如下两种：

法一：设 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$，展开移项整理得 $a_{n+1} = pa_n + (p-1)\lambda$，与题设 $a_{n+1} = pa_n + q$

比较系数（待定系数法）得 $\lambda=\frac{q}{p-1},(p\neq 0)\Rightarrow a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p(a_n+\frac{q}{p-1})\Rightarrow a_n+\frac{q}{p-1}=p(a_{n-1}+\frac{q}{p-1})$，即 $\left\{a_n+\frac{q}{p-1}\right\}$ 构成以 $a_1+\frac{q}{p-1}$ 为首项，以 p 为公比的等比数列．再利用等比数列的通项公式求出 $\left\{a_n+\frac{q}{p-1}\right\}$ 的通项整理可得 a_n.

法二：由 $a_{n+1}=pa_n+q$ 得 $a_n=pa_{n-1}+q(n\geq 2)$ 两式相减并整理得 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=p,$ 即 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 构成以 a_2-a_1 为首项，以 p 为公比的等比数列．求出 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的通项再转化为累加法便可求出 a_n.

类型二：形如 $a_{n+1}=pa_n+f(n)\ (p\neq 1)$ 型的递推式：

（1）当 $f(n)$ 为一次函数类型（即等差数列）时：

法一：设 $a_n+An+B=p\left[a_{n-1}+A(n-1)+B\right]$，通过待定系数法确定 A、B 的值，转化成以 a_1+A+B 为首项，以 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$ 为公比的等比数列 $\{a_n+An+B\}$，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n+An+B\}$ 的通项整理可得 a_n.

法二：当 $f(n)$ 的公差为 d 时，由递推式得：$a_{n+1}=pa_n+f(n)$，$a_n=pa_{n-1}+f(n-1)$ 两式相减得：$a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})+d$，令 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 得：$b_n=pb_{n-1}+d$ 转化为类型Ⅴ㈠求出 b_n，再用累加法便可求出 a_n.

（2）当 $f(n)$ 为指数函数类型（即等比数列）时：

法一：设 $a_n+\lambda f(n)=p\left[a_{n-1}+\lambda f(n-1)\right]$，通过待定系数法确定 λ 的值，转化成以 $a_1+\lambda f(1)$ 为首项，以 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$ 为公比的等比数列 $\{a_n+\lambda f(n)\}$，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n+\lambda f(n)\}$ 的通项整理可得 a_n.

法二：当 $f(n)$ 的公比为 q 时，由递推式得：$a_{n+1}=pa_n+f(n)$—①，$a_n=pa_{n-1}+f(n-1)$，两边同时乘以 q 得 $a_nq=pqa_{n-1}+qf(n-1)$—②，由①②两式相减得 $a_{n+1}-a_nq=p(a_n-qa_{n-1})$，即 $\frac{a_{n+1}-qa_n}{a_n-qa_{n-1}}=p$，构造等比数列。

法三：递推公式为 $a_{n+1}=pa_n+q^n$（其中 p，q 均为常数）或 $a_{n+1}=pa_n+rq^n$（其中 p，q，　r 均为常数）时，要先在原递推公式两边同时除以 q^{n+1}，得：$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$，引入辅助数列 $\{b_n\}$（其中 $b_n=\frac{a_n}{q^n}$），得：$b_{n+1}=\frac{p}{q}b_n+\frac{1}{q}$，再结合第一种类型。

6、取倒数法：$a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}(p，q，r$ 是常数)，可变形为 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{r}{p}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{q}{p}$

要点：①若 $p=r$，则 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，且公差为 $\frac{q}{p}$，可用公式求通项；

②若 $p \neq r$，则转化为 $a_{n+1}=sa_n+t$ 型，再利用待定系数法构造新数列求解

7、三项递推构造：适用于形如 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ 型的递推式

用待定系数法，化为特殊数列 $\{a_n-a_{n-1}\}$ 的形式求解．方法为：设 $a_{n+2}-ka_{n+1}=h(a_{n+1}-ka_n)$，比较系数得 $h+k=p,-hk=q$，可解得 h、k，于是 $\{a_{n+1}-ka_n\}$ 是公比为 h 的等比数列，这样就化归为 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型．

8、不动点法

（1）定义：方程 $f(x)=x$ 的根称为函数 $f(x)$ 的不动点．

利用函数 $f(x)$ 的不动点，可将某些递推关系 $a_{n+1}=f(a_n)$ 所确定的数列化为等比数列或较易求通项的数列，这种求数列通项的方法称为不动点法．

（2）在数列 $\{a_n\}$ 中，a_1 已知，且 $n\geq 2$ 时，$a_n=pa_{n-1}+q$（p,q 是常数），

①当 $p=1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

②当 $p=0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为常数数列；

③当 $p\neq 1,q=0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；

④当 $p\neq 0,1,q\neq 0$ 时，称 $x=px+q$ 是数列 $\{a_n\}$ 的一阶特征方程，

其根 $x=\dfrac{q}{1-p}$ 叫做特征方程的特征根，这时数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n=(a_1-x)p^{n-1}+x$；

（3）形如 $a_1=m_1$，$a_2=m_2$，$a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$（$p$、$q$ 是常数）的二阶递推数列都可用特征根法求得通项 a_n，其特征方程为 $x^2=px+q$（*）．

（1）若方程（*）有二异根 α、β，则可令 $a_n=c_1\cdot\alpha^n+c_2\cdot\beta^n$（$c_1$、$c_2$ 是待定常数）；

（2）若方程（*）有二重根 $\alpha=\beta$，则可令 $a_n=(c_1+nc_2)\cdot\alpha^n$（$c_1$、$c_2$ 是待定常数）．

(其中 c_1、c_2 可利用 $a_1=m_1$，$a_2=m_2$ 求得)

题型特训·精准提分

【题型 1　由 an 与 Sn 的关系求通项公式】

易错点拨

在数列问题中，数列的通项 a_n 与其前 n 项和 S_n 之间关系如下 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2,n\in N^*)\end{cases}$，在使用这个关系式时，要牢牢记住其分段的特点。当题中给出数列｛a_n｝的 a_n 与 S_n 关系时，先令 $n=1$ 求出首项 a_1，然后令 $n\geq 2$ 求出通项 $a_n=S_n-S_{n-1}$，最后代入验证。解答此类题常见错误为直接令 $n\geq 2$ 求出通项

$a_n=S_n-S_{n-1}$，也不对 $n=1$ 进行检验。

解题大招

已知 S_n 求 a_n 的三个步骤

（1）利用 $a_1=S_1$ 求出 a_1.

（2）当 $n\geq2$ 时，利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$求出 a_n 的表达式.

（3）看 a_1 是否符合 $n\geq2$ 时 a_n 的表达式，如果符合，则可以把数列的通项公式合写；否则应写成分段的形式，即 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq2.\end{cases}$

根据所求结果的不同要求，将问题向两个不同的方向转化.

（1）利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$转化为只含 S_n，S_{n-1} 的关系式，再求解.

（2）利用 $S_n-S_{n-1}=a_n(n\geq2)$转化为只含 a_n，a_{n-1} 的关系式，再求解.

1．（2024·河南开封·二模）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3^n-1$，则 $a_5=$（　）

A．81　　B．162　　C．243　　D．486

2．（2024·四川·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为（　）

A．$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, n=1,\\ 2^n, n\geq2\end{cases}$　　B．$a_n=2^{n-1}$

C．$a_n=(-2)^{n-2}$　　D．$a_n=2^{n-2}$

3．（2024·福建漳州·一模）已知各项均不为 0 的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $3S_n=a_n+1$，则 $\frac{a_8}{a_7}=$（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

4．（2024·江苏·一模）已知正项数列$\{a_n\}$满足 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{2n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，若 $a_5-2a_6=7$，则 $a_1=$（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．1　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

5．（23-24 高三上·广东深圳·阶段练习）已知 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=1-\frac{n+2}{2^n}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，求数列 $a_n=$__________.

【题型 2　由递推关系求数列的通项公式】

解题大招

1、累加法：形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）构造：$\begin{cases} a_n-a_{n-1}=f(n-1) \\ a_{n-1}-a_{n-2}=f(n-2) \\ \cdots \\ a_2-a_1=f(1) \end{cases}$

2、累乘法：形如 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$ $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)\right)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）构造：

$$\begin{cases} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n-1) \\ \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=f(n-2) \\ \cdots \\ \dfrac{a_2}{a_1}=f(1) \end{cases}$$

3、构造法：

（1）形如 $a_{n+1}=pa_n+q$（p,q 为常数，$pq\neq 0$ 且 $p\neq 1$）的递推式，可构造 $a_{n+1}+\lambda=p(a_n+\lambda)$，转化为等比数列求解．也可以与类比式 $a_n=pa_{n-1}+q$ 作差，由 $a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})$，构造 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等比数列，然后利用叠加法求通项．

（2）形如 $a_{n+1}=pa_n+d^n$ $(p\neq 0$且 $p\neq 1$，$d\neq 1)$ 的递推式，当 $p=d$ 时，两边同除以 d^{n+1} 转化为关于 $\left\{\dfrac{a_n}{d^n}\right\}$ 的等差数列；当 $p\neq d$ 时，两边人可以同除以 d^{n+1} 得 $\dfrac{a_{n+1}}{d^{n+1}}=\dfrac{p}{d}\cdot\dfrac{a_n}{d^n}+\dfrac{1}{d}$，转化为 $b_{n+1}=\dfrac{p}{d}\cdot b_n+\dfrac{1}{d}$．

（3）通过配凑转化为 $a_n+An+B=p\left[a_{n-1}+A(n-1)+B\right]$，通过待定系数法确定 A、B 的值，转化成以 a_1+A+B 为首项，以 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ 为公比的等比数列 $\{a_n+An+B\}$，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n+An+B\}$ 的通项整理可得 a_n.

4、取倒数法：对于 $a_{n+1}=\dfrac{aa_n}{b+ca_n}(ac\neq 0)$，取倒数得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{b+ca_n}{aa_n}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{c}{a}$．

当 $a=b$ 时，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列；

当 $a\neq b$ 时，令 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，则 $b_{n+1}=\dfrac{b}{a}\cdot b_n+\dfrac{c}{a}$，可用待定系数法求解．

1．（2024·山东潍坊·一模）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，$a_2=1$．若数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是公比为 2 的等比数列，则 $a_{2024}=$（ ）

A. $\dfrac{2^{2023}+1}{3}$　　B. $\dfrac{2^{2024}+1}{3}$　　C. $2^{1012}-1$　　D. $2^{1011}-1$

2. （23-24 高三上·河南·期中）在数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$，$a_1=1$，$\dfrac{a_{n+1}^2+a_n^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=2n$，则$a_{113}=$（　）

A. $4\sqrt{14}$　　B. 15　　C. $\sqrt{223}$　　D. 10

3. （23-24 高三下·安徽·开学考试）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}a_n$，则$\dfrac{a_8}{a_4}=$（　）

A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{1}{8}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

4. （2024·江苏南京·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,2a_{n+1}-a_n+a_na_{n+1}=0(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为__________.

5. （23-24 高三上·河南焦作·开学考试）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=3a_n+2$，$a_3+a_2=22$，则满足$a_n>160$的最小正整数$n=$___________.

【题型 3　数列的周期性及应用】

解题大招

1、周期数列的常见形式

（1）利用三角函数的周期性，即所给递推关系中含有三角函数；

（2）相邻多项之间的递推关系，如后一项是前两项的差；

（3）相邻两项的递推关系，等式中一侧含有分式，又较难变形构造出特殊数列.

2、解决此类题目的一般方法：根据给出的关系式求出数列的若干项，通过观察归纳出数列的周期，进而求有关项的值或者前n项的和.

1. （2024·广西南宁·一模）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$（其中$a\neq1$且$a\neq0$），当$n\geq2$时，$a_n=\dfrac{1}{1-a_{n-1}}$，则$a_{2024}=$（　）

A. a　　B. $\dfrac{1}{1-a}$　　C. $1-\dfrac{1}{a}$　　D. 无法确定

2. （2024·甘肃兰州·一模）数列$\{a_n\}$满足$a_1=2^{1011}$，$a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+1, & a_n\text{为奇数}\\ \dfrac{1}{2}a_n, & a_n\text{为偶数}\end{cases}$，则$a_{2024}=$（　）

A. 5　　B. 4　　C. 2　　D. 1

3. （2024·四川宜宾·二模）在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=2,a_2=1$，且满足$a_{n+2}+a_n=a_{n+1}$，则数列$\{a_n\}$的前 2024 项的和为（　）

A．3　　　　　　　B．2　　　　　　　C．1　　　　　　　D．0

4．（2024·山西·一模）已知数列$\{a_n\}$满足$a_na_{n+1}=2a_{n+1}-a_n-1$，且$a_1=3$，则$a_{2024}=$（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　　　　　B．-4　　　　　　C．$\frac{5}{4}$　　　　　　D．$\frac{2}{3}$

5．（2024·内蒙古包头·一模）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，则$S_{21}=$__________.

【题型4　用函数研究数列的单调性和最值】

解题大招

求数列最大项或最小项的方法

（1）将数列视为函数$f(x)$当x∈N*时所对应的一列函数值，根据$f(x)$的类型作出相应的函数图象，或利用求函数最值的方法，求出$f(x)$的最值，进而求出数列的最大(小)项.

（2）通过通项公式a_n研究数列的单调性，

利用$\begin{cases}a_n\geq a_{n-1}\\a_n\geq a_{n+1}\end{cases}(n\geq 2)$确定最大项，利用$\begin{cases}a_n\leq a_{n-1}\\a_n\leq a_{n+1}\end{cases}(n\geq 2)$确定最小项.

（3）比较法：

①若有$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-f(n)>0$（或$a_n>0$时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$），

则$a_{n+1}>a_n$，即数列$\{a_n\}$是递增数列，所以数列$\{a_n\}$的最小项为$a_1=f(1)$；

②若有$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-f(n)<0$（或$a_n>0$时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$），

则$a_{n+1}<a_n$，即数列$\{a_n\}$是递减数列，所以数列$\{a_n\}$的最大项为$a_1=f(1)$

1．（2024·全国·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=t,a_{n+1}-2a_n=-n+1$，若$\{a_n\}$是递减数列，则实数t的取值范围为（　　）

A．$(-1,1)$　　　　B．$(-\infty,0)$　　　　C．$(-1,1]$　　　　D．$(1,+\infty)$

2．（23-24高三下·湖南长沙·阶段练习）已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=3n-b(n\in\mathbf{N}^*,b\in\mathbf{R})$，则“$b<3$”是“$\{|a_n|\}$是递增数列”的（　　）

A．充分不必要条件　　　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

3．（2024·辽宁·一模）若函数$f(x)$使得数列$a_n=f(n)$，$n\in\mathbf{N}^*$为递减数列，则称函数$f(x)$

为“数列保减函数”，已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax$ 为“数列保减函数”，则 a 的取值范围（　）

A．$\left[\ln 3,+\infty\right)$　　B．$\left(\ln 2,+\infty\right)$　　C．$\left[1,+\infty\right)$　　D．$\left(0,+\infty\right)$

4．（2024·安徽阜阳·一模）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=2n^2+\lambda n\left(\lambda\in\mathbf{R}\right)$，则“$\{a_n\}$ 为递增数列”是“$\lambda\geq 0$”的（　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

5．（23-24 高三下·重庆·阶段练习）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n,a_1=\lambda,a_2=2,\{a_n\}$ 单调递增，则 λ 的取值范围为（　）

A．$\left(-\infty,1\right)$　　B．$\left(-\infty,1\right]$　　C．$\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,2\right)$　　D．$\left(-\infty,2\right)$

考点二：等差数列及其前 n 项和

核心提炼·查漏补缺

知识点 1　等差数列的概念及公式

1、等差数列的定义

（1）文字语言：一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数；

（2）符号语言：$a_{n+1}-a_n=d$（$n\in N^*$，d 为常数）.

2、等差中项：若三个数 a，A，b 组成等差数列，则 A 叫做 a，b 的等差中项.

3、通项公式与前 n 项和公式

（1）通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$．

（2）前 n 项和公式：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$．

（3）等差数列与函数的关系

①通项公式：当公差 $d\neq 0$ 时，等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$ 是关于 n 的一次函数，且一次项系数为公差 d .若公差 $d>0$，则为递增数列，若公差 $d<0$，则为递减数列.

②前 n 项和：当公差 $d\neq 0$ 时，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n$ 是关于 n 的二次函数且常数项为 0.

知识点 2　等差数列的性质

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和.

1、等差数列通项公式的性质：

（1）通项公式的推广：$a_n=a_m+(n-m)d(n,m\in N^*)$.

（2）若 $k+l=m+n(k,l,m,n\in N^*)$，则 $a_k+a_l=a_m+a_n$.

（3）若 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\{a_{2n}\}$ 也是等差数列，公差为 $2d$.

（4）若$\{b_n\}$是等差数列，则$\{pa_n+qb_n\}$也是等差数列.

2、等差数列前n项和的性质

（1）$S_{2n}=n(a_1+a_{2n})=\cdots=n(a_n+a_{n+1})$；

（2）$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$；

（3）两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和S_n，T_n之间的关系为$\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{a_n}{b_n}$.

（4）数列S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…构成等差数列.

（5）若项数为$2n$，则$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$；

（6）若项数为$2n-1$，则$S_{偶}=(n-1)a_n$，$S_{奇}=na_n$，$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{n}{n-1}$.

题型特训·精准提分

【题型 1　等差数列的基本量求解】

解题大招

1、等差数列的通项公式及前 n 项和公式共涉及五个量 a_1，a_n，d，n，S_n，知其中三个就能求另外两个，体现了方程思想.

2、数列的通项公式和前 n 项和公式在解题中起到变量代换的作用，而 a_1 和 d 是等差数列的两个基本量，用它们表示已知量和未知量是常用方法.

1．（2023·全国·高考真题）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_2+a_6=10,a_4a_8=45$，则$S_5=$（　　）

A．25　　B．22　　C．20　　D．15

2．（2023·全国·高考真题）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，且$d>1$．令$b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，记S_n,T_n分别为数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前n项和.

（1）若$3a_2=3a_1+a_3,S_3+T_3=21$，求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，且$S_{99}-T_{99}=99$，求d.

3．（2024·天津·一模）已知$\{a_n\}$为等差数列，前n项和为S_n，且$a_1=2$，$S_3=a_2+18$，则$a_4=$（　　）

A．54　　B．45　　C．23　　D．18

4．（2024·江苏盐城·模拟预测）在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=2,d=3,S_{n+3}-S_n=60,$则$n$的值为（　　）

A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

5．（2024·陕西商洛·模拟预测）设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，且$S_3=9,S_9=\frac{45}{2}$，则$S_{15}=$（　）

A．34　　　　B．30　　　　C．26　　　　D．22

【题型2　等差数列的性质及应用】

1、在等差数列$\{a_n\}$中，当$m\neq n$时，$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$为公差公式，利用这个公式很容易求出公差，还可变形为$a_m=a_n+(m-n)d$.

2、等差数列$\{a_n\}$中，每隔相同的项抽出来的项按照原来的顺序排列，构成的新数列仍然是等差数列.

3、等差数列$\{a_n\}$中，若$m+n=p+q$，则$a_n+a_m=a_p+a_q(n，m，p，q\in\mathbf{N}^*)$，

特别地，若$m+n=2p$，则$a_n+a_m=2a_p$.

1．（2024·山西朔州·一模）设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_9=\frac{45}{2}$，则$2a_8-a_{11}=$（　）

A．$\frac{5}{2}$　　　　B．3　　　　C．$\frac{9}{2}$　　　　D．5

2．（23-24高三下·山东菏泽·阶段练习）已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1+a_3+a_5=15,a_4+a_6+a_8=33$，则$a_9=$（　）

A．6　　　　B．12　　　　C．17　　　　D．24

3．（2024·全国·模拟预测）在等差数列$\{a_n\}$中，已知a_3与a_9是方程$2x^2-x+m=0$的两根，则$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4(a_1+a_2+\cdots+a_{11})}=$（　）

A．$\frac{\sqrt{11}}{11}$　　　　B．$\frac{2\sqrt{11}}{11}$　　　　C．$\frac{\sqrt{11}}{4}$　　　　D．$\frac{11}{2}$

4．（2024·甘肃·一模）已知数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_4+a_5+a_6=6,a_7+a_8+a_9=11$，则$a_{10}+a_{11}+a_{12}=$（　）

A．16　　　　B．19　　　　C．25　　　　D．29

5．（2024·山东青岛·一模）记正项等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_{20}=100$，则$a_{10}\cdot a_{11}$的最大值为（　）

A．9　　　　B．16　　　　C．25　　　　D．50

【题型3　等差数列的前n项和性质及应用】

解题大招

1、等差数列的依次 k 项之和，S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，…组成公差为 k^2d 的等差数列．

2、数列$\{a_n\}$是等差数列$\Leftrightarrow S_n=an^2+bn$($a$，$b$ 为常数)$\Leftrightarrow$数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列．

3、若 $S_{奇}$表示奇数项的和，$S_{偶}$表示偶数项的和，公差为 d，

①当项数为偶数 $2n$ 时，$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；

②当项数为奇数 $2n-1$ 时，$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$．

1．（2024·广东佛山·模拟预测）设等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，若对任意正整数 n 都有 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n-3}{4n-3}$，则 $\frac{a_3}{b_4+b_8}+\frac{a_9}{b_5+b_7}=$（　）

A．$\frac{3}{7}$　　B．$\frac{5}{21}$　　C．$\frac{19}{41}$　　D．$\frac{19}{40}$　　E．均不是

2．（23-24 高三上·河北·期末）设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $\frac{S_5}{S_{10}}=\frac{1}{3}$，则 $\frac{S_{10}}{S_{20}}=$（　）

A．$\frac{3}{7}$　　B．$\frac{3}{10}$　　C．$\frac{3}{11}$　　D．$\frac{3}{14}$

3．（23-24 高三上·河南·阶段练习）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $\frac{S_7}{7}-\frac{S_3}{3}=4$，则 $a_9-a_6=$（　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．6

4．（2024·广东深圳·模拟预测）设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $\frac{S_7}{S_6}=\frac{13}{11}$，则 $\frac{S_{15}}{S_{11}}=$______．

5．（23-24 高三上·安徽安庆·阶段练习）（多选）已知 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 和，下列说法正确的是（　）

A．若数列$\{a_n\}$为等差数列，则 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$ 为等差数列

B．若$\{a_n\}$为等比数列，则 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$ 为等比数列

C．若$\{a_n\}$为等差数列，则 $\frac{S_m}{m}$，$\frac{S_{2m}}{2m}$，$\frac{S_{3m}}{3m}$ 为等差数列

D．若$\{a_n\}$为等比数列，则 $\frac{S_m}{m}$，$\frac{S_{2m}}{2m}$，$\frac{S_{4m}}{4m}$ 为等比数列

【题型 4　等差数列的单调性及最值】

解题大招

1、二次函数法：将 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ 配方．转化为求二次函数的最值问题，但要注意 $n\in\mathbf{N}^*$，结合二次函数图象的对称性来确定 n 的值，更加直观．

2、邻项变号法：当 $a_1>0$，$d<0$，$\begin{cases}a_n\geq 0,\\a_{n+1}\leq 0\end{cases}$ 时，S_n 取得最大值；当 $a_1<0$，$d>0$，$\begin{cases}a_n\leq 0,\\a_{n+1}\geq 0\end{cases}$ 时，S_n 取得最小值．

特别地，若 $a_1>0$，$d>0$，则 S_1 是 $\{S_n\}$ 的最小值；若 $a_1<0$，$d<0$，则 S_1 是 $\{S_n\}$ 的最大值．

1．（23-24 高三上·江西赣州·阶段练习）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d<0$，$a_3a_5=24$，$a_2+a_6=10$，记该数列的前 n 项和为 S_n，则 S_n 的最大值为（　）

A．20　　B．24　　C．36　　D．40

2．（23-24 高三下·重庆·月考）已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，S_n 是其前 n 项和，且 $a_1<0, S_{1998}=S_{2024}$，则（　）

A．$d<0$　　B．$a_{2011}=0$　　C．$S_{4022}=0$　　D．$S_n\geq S_{2012}$

3．（2024·黑龙江吉林·二模）（多选）已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，S_n 是其前 n 项的和，若 $a_1<0$，$S_{2000}=S_{2024}$，则（　）

A．$d>0$　　B．$a_{2012}=0$　　C．$S_{4024}=0$　　D．$S_n\geq S_{2012}$

4．（23-24 高三下·安徽·阶段练习）（多选）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1>0$，且 $(S_{11}-S_7)(S_{11}-S_8)<0$，则（　）

A．$a_9+a_{10}>0$　　B．$S_7<S_{11}<S_8$

C．当 $n=10$ 时，S_n 取最大值　　D．当 $S_n<0$ 时，n 的最小值为 19

5．（23-24 高三上·江苏·期末）（多选）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2+\lambda n+\mu$，则下列结论正确的有（　）

A．若 $\mu=0$，则 $\{a_n\}$ 为等差数列

B．若 $\mu=3$，则 $\{a_n\}$ 为递增数列

C．若 $\lambda=-\frac{11}{2}$，则当且仅当 $n=3$ 时 S_n 取得最小值

D．“$\lambda>-3$”是“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”的充要条件

【题型 5　等差数列的判定与证明】

解题大招

1、定义法：$a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*)$ 或 $a_n-a_{n-1}=d(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等差数列；

2、定义变形法：验证是否满足 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*)$；

3、等差中项法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 为等差数列；

4、通项公式法：通项公式形如 $a_n=pn+q(p,q$ 为常数$)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 为等差数列；

5、前 n 项和公式法：$S_n=pn^2+qn(p,q$ 为常数$)\Leftrightarrow\{a_n\}$ 为等差数列.

注意：（1）若判断一个数列不是等差数列，只需找出三项 a_n,a_{n+1},a_{n+2}，使得 $2a_{n+1}\neq a_n+a_{n+2}$ 即可；

（2）如果要证明一个数列是等差数列，则必须用定义法或等差中项法.

1．（23-24 高二上·云南昆明·期中）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.

（1）求 a_3,a_4 的值；

（2）设 $b_n=a_{n+1}-a_n$，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列.

2．（2024 高三·江苏·专题练习）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，b_n 为数列 S_n 的前 n 项积，已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

3．（23-24 高三上·海南·期末）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $2S_n\cdot S_{n-1}=S_{n-1}-S_n\left(S_n\neq 0,n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，且 $a_1=\frac{1}{3}$.

（1）证明数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列，并求 S_n 的表达式；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.