1.4　整式的乘法

知识梳理

知识点一　单项式×单项式

单项式与单项式相乘，把它们的系数、相同字母的幂分别相乘，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式。

注：①单项式乘单项式，结果仍为单项式；②单项式相乘时，注意不要漏掉无相同之母的项。

知识点二　单项式×多项式

根据乘法分配律，用单项式乘以多项式的每一项，再把所得的积相加。

即：$p(a+b+c)=pa+pb+pc$

注：单项式乘以多项式的积仍是一个多项式，积的项数与原多项式的项数相同；如果式中含有乘方运算，仍应先算乘方，在算乘法。

知识点三　多项式×多项式

先用一个多项式的每一项分别乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加。

即：$(a+b)(p+q)=ap+aq+bp+bq$。

注：运算过程中，需要关注符号的变化（负负得正，正负为负）；乘法运算的结果中，如果有同类项，需要合并同类项，化为最简形式。

常考题型

题型精析

题型一 整式乘法中的求值问题

【例题1】 已知等式（$x+p$）（$x+q$）$=x^2+mx+36$（p，q 为正整数），则 m 的值不可能是（　　）

A．37　　　　B．13　　　　C．20　　　　D．36

【分析】利用多项式乘多项式的法则，把等式的左边进行运算，再根据条件进行分析即可．

【解答】解：（$x+p$）（$x+q$）$=x^2+$（$p+q$）$x+pq$，

∵（$x+p$）（$x+q$）$=x^2+mx+36$，

∴$p+q=m$，$pq=36$，

∵$36=4\times9$，则 $p+q=13$，

$36=1\times36$，则 $p+q=37$，

$36=2\times18$，则 $p+q=20$，

$36=3\times12$，则 $p+q=15$，

$36=6\times6$，则 $p+q=12$，

∴$p+q$ 不可能为 36，即 m 不可能为 36．

故选：D．

解题技巧提炼

p（$a+b+c$）$=pa+pb+pc$；（$a+b$）（$m+n$）$=am+an+bm+bn$

【变式 1-1】（1）已知：$a^2+a-1=0,$ 则 $a^4+2a^3+a^2+2000$ 的值是_____

（2）如果记 $2^{16}=a,$ 那么 $1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{15}=$_____

（3）若 $2^{2x+3}-2^{2x+1}=192,$ 则 x=_____

（4）若 $(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,$ 则 $a_2+a_4=$_____

【分析】（1）根据题意，得到 $a^2+a=1$；再将原式进行变形即可得出答案

（2）先设原式等于 m，利用 2m－m 求出原式的值，最后将 a 代入即可

（3）根据幂的乘方运算公式对原式进行变形，然后进而的出答案 （4）采用赋值法进行计算

【解析】（1）由题意得：$a^2+a=1$；

$\therefore a^4+2a^3+a^2+2000=a^4+a^3+a^3+a^2+2000=a^2\left(a^2+a\right)+a^3+a^2+2000=a^3+a^2+a^2+2000=$

$a\left(a^2+a\right)+a^2+2000=1+2000=2001$

（2）设 $m=1+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{15}$，则 $2m=2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{16}$；

$\therefore 2m-m=2^{16}-1$，即 $m=2^{16}-1$ $\therefore$原式$=a-1$

（3）$2^{2x+3}-2^{2x+1}=2^{2x+1}\cdot 2^2-2^{2x+1}=3\cdot 2^{2x+1}=192$

$\therefore 2^{2x+1}=64$ $\therefore 2x+1=6$ $\therefore x=\dfrac{5}{2}$

（4）当 x=1 时，$1=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ ……①

当 x=－1 时，$-3^5=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$ ……②

当 x=0 时，$-1=a_0$ ①＋②$=2\left(a_0+a_2+a_4\right)=1-3^5$

即 $a_0+a_2+a_4=\dfrac{1-3^5}{2}$ $\therefore a_2+a_4=\dfrac{1-3^5}{2}+1=-120$

【变式 1-2】若（$x+a$）（$x-5$）$=x^2+bx-10$，则 $ab-a+b$ 的值是（　　）

A. －11　　B. －7　　C. －6　　D. －55

【分析】先利用多项式乘多项式法则计算等式的左边，根据等式得到 a、b 的值，代入计算出代数式 $ab-a+b$ 的值．

【解答】解：∵（$x+a$）（$x-5$）$=x^2+$（$a-5$）$x-5a$，

又∵（$x+a$）（$x-5$）$=x^2+bx-10$，

$\therefore x^2+(a-5)x-5a=x^2+bx-10$．

$\therefore a-5=b$，$-5a=-10$．

$\therefore a=2$，$b=-3$．

$\therefore ab-a+b=2\times(-3)-2-3=-11$．

故选：A．

【变式 1-3】若 $x+y=2$，$xy=-1$，则（$1-2x$）（$1-2y$）的值是______．

【分析】根据多项式乘以多项式的法则展开，整理后整体带入求值即可．

【解答】解：（$1-2x$）（$1-2y$）

$=1-2y-2x+4xy$

$=1-2(x+y)+4xy$，

当 $x+y=2$，$xy=-1$ 时

原式$=1-2\times2+4\times(-1)$

$=-7$．

故答案为：-7．

【变式 1-4】在计算（$2x+a$）（$x+b$）时，甲错把 b 看成了 6，得到结果是：$2x^2+8x-24$；乙错把 a 看成了 $-a$，得到结果：$2x^2+14x+20$．

（1）求出 a，b 的值；

（2）在（1）的条件下，计算（$2x+a$）（$x+b$）的结果．

【分析】（1）根据题意得出（$2x+a$）（$x+6$）$=2x^2+(12+a)x+6a=2x^2+8x-24$，（$2x-a$）（$x+b$）$=2x^2+(-a+2b)x-ab=2x^2+14x+20$，得出 $12+a=8$，$-a+2b=14$，求出 a、b 即可；

（2）把 a、b 的值代入，再根据多项式乘以多项式法则求出即可．

【解答】解：（1）甲错把 b 看成了 6，

（$2x+a$）（$x+6$）

$=2x^2+12x+ax+6a$

$=2x^2+(12+a)x+6a$

$=2x^2+8x-24$，

$\therefore 12+a=8$，

解得：$a=-4$；

乙错把 a 看成了 $-a$，

（$2x-a$）（$x+b$）

$=2x^2+2bx-ax-ab$

$=2x^2+(-a+2b)x-ab$

$=2x^2+14x+20$，

$\therefore 2b-a=14$，

把 $a=-4$ 代入，得 $b=5$；

（2）当 $a=-4$，$b=5$ 时，

$(2x+a)(x+b)$

$=(2x-4)(x+5)$

$=2x^2+10x-4x-20$

$=2x^2+6x-20$．

题型二 整式乘法中的不含某项问题

【例题 2】关于 x 的代数式 $(mx-2)(2x+1)+x^2+n$ 化简后不含有 x^2 项和常数项．

（1）分别求 m，n 的值．

（2）求 $m^{2020}n^{2021}$ 的值．

【分析】（1）先展开整理原式，再根据题意建立关于 m、n 的等式，分别求解即可得出结论．

（2）同底数幂乘法的逆运算，使 n^{2021} 变为 $n^{2020}\cdot n$，再利用积的乘方逆运算即可求出原式的值．

【解答】解：（1）原式 $=2mx^2+mx-4x-2+x^2+n$，

$=(2m+1)x^2+mx-4x+n-2$，

由题意 $2m+1=0$，$n-2=0$，

$\therefore m=-\frac{1}{2}$，$n=2$．

（2）原式 $=m^{2020}\cdot n^{2020}\cdot n$，

$=(m\cdot n)^{2020}\cdot n$，

由（1）得 $m=-\frac{1}{2}$，$n=2$，

原式 $=\left(-\frac{1}{2}\times 2\right)^{2020}\times 2$，

$=2$．

解题技巧提炼

先按照多项式乘以多项式将括号打开，再根据不含项的系数为 0 得到方程，解方程即可得到答案.

【变式 2-1】已知$(-2x)\cdot(5-3x+mx^2-nx^3)$的结果中不含 x^3 项，则 m 的值为(　　)

A．1　　　　B．-1　　　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　　　D．0

【分析】根据单项式与多项式相乘，先用单项式乘多项式的每一项，再把所得的积相加，

根据整式不含 x^3 项，可得三次项的系数为零.

【解析】$(-2x)\cdot(5-3x+mx^2-nx^3)=-10x+6x^2-2mx^3+2nx^4$，

由$(-2x)\cdot(5-3x+mx^2-nx^3)$的结果中不含 x^3 项，得$-2m=0$，解得 $m=0$，故选：D.

【变式 2-2】若多项式 x^2+mx-8 和 x^2-3x+n 的的乘积中不含 x^2 和 x^3 的项，求 $m+n$ 的值.

【分析】利用多项式的乘法法则将两个多项式的乘积展开，令 x^2 项和 x^3 项的系数为 0，结论可得.

【解答】解：由题意：

$(x^2+mx-8)(x^2-3x+n)$

$=x^4-3x^3+nx^2+mx^3-3mx^2+mnx-8x^2+24x-8n$

$=x^4+(m-3)x^3+(n-3m-8)x^2+(mn+24)x-8n$.

∵乘积中不含 x^2 和 x^3 的项，

∴$m-3=0$，$n-3m-8=0$.

∴$m=3$，$n=17$.

∴$m+n=20$.

【变式 2-3】已知$(x^3+mx+n)(x^2-3x+4)$展开式中不含 x^3 和 x^2 项.

(1)求 m、n 的值；

(2)当 m、n 取第(1)小题的值时，求$(m+n)(m^2-mn+n^2)$的值.

【分析】(1)利用多项式乘以多项式法则计算得到结果，根据展开式中不含 x^2 和 x^3 项列出关于 m 与 n 的方程组，求出方程组的解即可得到 m 与 n 的值；

(2)先利用多项式乘以多项式的法则将$(m+n)(m^2-mn+n^2)$展开，再合并同类项化为最简形式，然后将(1)中所求 m、n 的值代入计算即可.

【解答】解：（1）（x^3+mx+n）（x^2-3x+4）

$=x^5-3x^4+(m+4)x^3+(n-3m)x^2+(4m-3n)x+4n$，

根据展开式中不含 x^2 和 x^3 项得：$\begin{cases}m+4=0\\n-3m=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}m=-4\\n=-12\end{cases}$.

即 $m=-4$，$n=-12$；

（2）∵（$m+n$）（m^2-mn+n^2）

$=m^3-m^2n+mn^2+m^2n-mn^2+n^3$

$=m^3+n^3$，

当 $m=-4$，$n=-12$ 时，

原式$=(-4)^3+(-12)^3=-64-1728=-1792$.

【变式 2-4】【知识回顾】

七年级学习代数式求值时，遇到这样一类题"代数式 $ax-y+6+3x-5y-1$ 的值与 x 的取值无关，求 a 的值"，通常的解题方法是：把 x、y 看作字母，a 看作系数合并同类项，因为代数式的值与 x 的取值无关，所以含 x 项的系数为 0，即原式＝（$a+3$）$x-6y+5$，所以 $a+3=0$，则 $a=-3$.

【理解应用】

（1）若关于 x 的多项式（$2x-3$）$m+2m^2-3x$ 的值与 x 的取值无关，求 m 值；

（2）已知 $A=(2x+1)(x-1)-x(1-3y)$，$B=-x^2+xy-1$，且 $3A+6B$ 的值与 x 无关，求 y 的值；

【能力提升】

（3）7 张如图 1 的小长方形，长为 a，宽为 b，按照图 2 方式不重叠地放在大长方形 $ABCD$ 内，大长方形中未被覆盖的两个部分（图中阴影部分），设右上角的面积为 S_1，左下角的面积为 S_2，当 AB 的长变化时，S_1-S_2 的值始终保持不变，求 a 与 b 的等量关系．

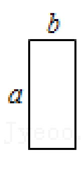

图 1

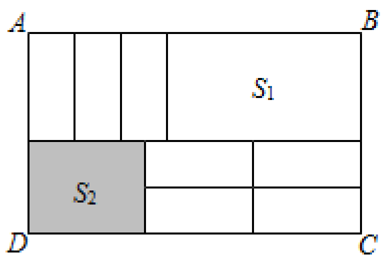

图 2

【分析】（1）由题可知代数式的值与 x 的取值无关，所以含 x 项的系数为 0，故将多项式整理为（$2m-3$）$x-3m+2m^2$，令 x 系数为 0，即可求出 m；

（2）根据整式的混合运算顺序和法则化简 $3A+6B$ 可得 $3x(5y-2)-9$，根据其值与 x 无关得出 $5y-2=0$，即可得出答案；

（3）设 $AB=x$，由图可知 $S_1=a(x-3b)$，$S_2=2b(x-2a)$，即可得到 S_1-S_2 关于 x 的代数式，根据取值与 x 可得 $a=2b$.

【解答】解：（1）$(2x-3)m+2m^2-3x$

$=2mx-3m+2m^2-3x$

$=(2m-3)x+2m^2-3m$，

∵其值与 x 的取值无关，

∴$2m-3=0$，

解得，$m=\frac{3}{2}$，

答：当 $m=\frac{3}{2}$时，多项式 $(2x-3)m+2m^2-3x$ 的值与 x 的取值无关；

（2）∵$A=(2x+1)(x-1)-x(1-3y)$，$B=-x^2+xy-1$，

∴$3A+6B=3[(2x+1)(x-1)-x(1-3y)]+6(-x^2+xy-1)$

$=3(2x^2-2x+x-1-x+3xy]-6x^2+6xy-6$

$=6x^2-6x+3x-3-3x+9xy-6x^2+6xy-6$

$=15xy-6x-9$

$=3x(5y-2)-9$，

∵$3A+6B$ 的值与 x 无关，

∴$5y-2=0$，即 $y=\frac{2}{5}$；

（3）设 $AB=x$，由图可知 $S_1=a(x-3b)$，$S_2=2b(x-2a)$，

∴$S_1-S_2=a(x-3b)-2b(x-2a)=(a-2b)x+ab$，

∵当 AB 的长变化时，S_1-S_2 的值始终保持不变.

∴S_1-S_2 取值与 x 无关，

∴$a-2b=0$

∴$a=2b$.

【变式 2-5】先化简，再求值：已知代数式 $(ax-3)(2x+4)-x^2-b$ 化简后，不含有 x^2 项和常数项.（1）求 a、b 的值；（2）求 $(b-a)(-a-b)+(-a-b)^2-a(2a+b)$ 的值.

【分析】（1）先算多项式乘多项式，再合并同类项，即可得出关于 a、b 的方程，求出即可；

（2）先化简原式，然后将 a 与 b 的值代入求出即可.

【解析】解：原式$=2ax^2+4ax-6x-12-x^2-b=\left(2a-1\right)x^2+\left(4a-6\right)x+\left(-12-b\right)$，

∵代数式（ax-3）（2x+4）$-x^2$-b 化简后，不含有 x^2 项和常数项.，

∴2a-1=0，-12-b=0，∴ $a=\frac{1}{2}$，$b=-12$；

(2) 解：∵$a=\frac{1}{2}$，b=-12，

∴（b-a）（-a-b）+（-a-b）^{2}-a（2a+b）$=a^2-b^2+a^2+2ab+b^2-2a^2-ab=ab=\frac{1}{2}\times(-12)=-6$.

题型三 整式乘法的计算

【例题 3】计算：

（1）$-12x^2y\cdot(\frac{1}{3}x^3y^2-\frac{3}{4}x^2y+\frac{1}{6})$

（2）（x - 1）（$2x$+1）- 2（x - 5）（x+2）

【分析】（1）根据单项式与多项式相乘的法则计算即可；

（2）根据多项式与多项式相乘的法则计算即可.

【解答】解：（1）$-12x^2y\cdot(\frac{1}{3}x^3y^2-\frac{3}{4}x^2y+\frac{1}{6})$

$=-12x^2y\cdot\frac{1}{3}x^3y^2+12x^2y\cdot\frac{3}{4}x^2y-12x^2y\cdot\frac{1}{6}$

$=-4x^5y^3+9x^4y^2-2x^2y$；

（2）（x - 1）（$2x$+1）- 2（x - 5）（x+2）

$=2x^2+x-2x-1-2(x^2+2x-5x-10)$

$=2x^2-x-1-2x^2+6x+20$

$=5x+19$.

解题技巧提炼

根据整式乘法的法则，进行计算.

【变式 3-1】计算 $2a^2b^3\cdot(-3a)$ 的结果是（　　）

A．$-6a^3b^3$　　B．$6a^2b^3$　　C．$6a^3b^3$　　D．$-6a^2b^3$

【分析】根据单项式乘以单项式法则求出即可.

【解析】解：$2a^2b^3$•（$-3a$）$=-6a^3b^3$，故选：A.

【变式 3-2】化简 $5a$•（$2a^2-ab$），结果正确的是（　　）

A．$-10a^3-5ab$　　B．$10a^3-5a^2b$　　C．$-10a^2+5a^2b$　　D．$-10a^3+5a^2b$

【分析】按照单项式乘以多项式的运算法则进行运算即可.

【解析】解：$5a$•（$2a^2-ab$）$=10a^3-5a^2b$，故选：B.

【变式 3-3】计算：

（1）$2x^2y$（$x-\frac{1}{2}y+1$）；

（2）（$x-2y$）（$y-x$）.

【分析】（1）单项式与多项式相乘的运算法则：单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加.

（2）多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另外一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

【解答】解：（1）原式$=2x^3y-x^2y^2+2x^2y$；

（2）原式$=xy-x^2-2y^2+2xy$

$=3xy-x^2-2y^2$.

【变式 3-4】计算：

（1）$-3x^2$（$2x-4y$）$+2x$（x^2-xy）.

（2）（$3x+2y$）（$2x-3y$）$-3x$（$3x-2y$）.

【分析】（1）根据多项式乘多项式，多项式乘单项式进行计算即可；