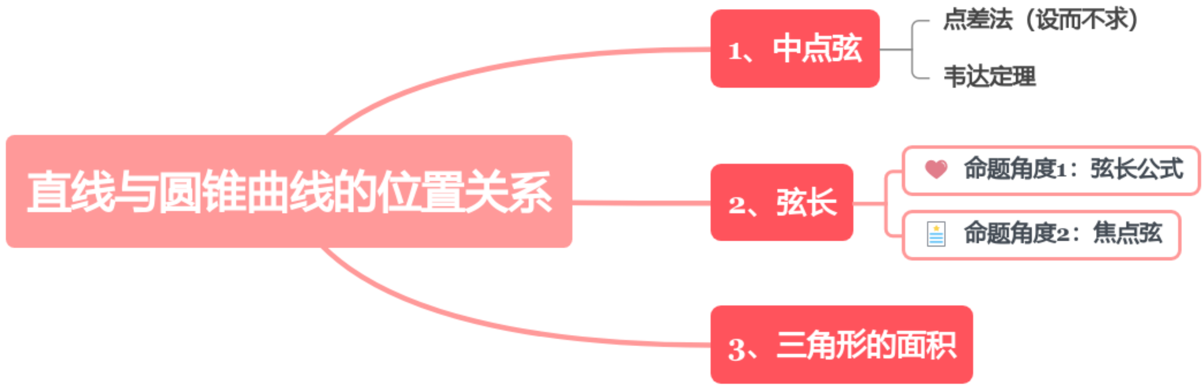
专题 02 直线与圆锥曲线的位置关系（弦长与三角形）

网络构建



夯基·必备基础知识梳理

知识点一：直线与椭圆联立，求解步骤：

第一步：代入消元，联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ 化简：$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2kma^2x + a^2m^2 - a^2b^2 = 0$

第二步：计算判别式；

$$\Delta = (2kma^2)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2m^2 - a^2b^2) = 4a^2b^2(b^2 + a^2k^2 - m^2) > 0$$

可直接利用结论：$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 + a^2k^2 - m^2 > 0$（范围、最值问题）

第三步：根与系数关系表达式；

$$x_1 + x_2 = \frac{-2kma^2}{b^2 + a^2k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2m^2 - a^2b^2}{b^2 + a^2k^2}$$

第四步：利用 $x_1 + x_2 = \dfrac{-2kma^2}{b^2 + a^2k^2}$，计算 $y_1 + y_2$

$$y_1 + y_2 = kx_1 + m + kx_2 + m = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2mb^2}{b^2 + a^2k^2}$$

第五步：利用 $x_1 + x_2 = \dfrac{-2kma^2}{b^2 + a^2k^2}$，$x_1x_2 = \dfrac{a^2m^2 - a^2b^2}{b^2 + a^2k^2}$ 计算 $y_1 \cdot y_2$

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{-k^2a^2b^2+m^2b^2}{b^2+a^2k^2}$

第六步：利用 $x_1+x_2=\dfrac{-2kma^2}{b^2+a^2k^2}$， $y_1+y_2=\dfrac{2mb^2}{b^2+a^2k^2}$， 计算弦中点$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

$\left(\dfrac{-kma^2}{b^2+a^2k^2},\dfrac{mb^2}{b^2+a^2k^2}\right)$

第七步：利用 $\Delta=4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)$，计算弦长$|AB|$和$\Delta OAB$的面积

$$|AB|=\frac{\sqrt{1+k^2}\sqrt{\Delta}}{b^2+a^2k^2}=\frac{2ab\sqrt{1+k^2}\sqrt{4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)}}{b^2+a^2k^2}=\frac{2ab\sqrt{1+k^2}\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}}{b^2+a^2k^2}$$

进而计算原点$(0,0)$到直线 $y=kx+b$ 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{2ab\sqrt{1+k^2}\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}}{b^2+a^2k^2}=\frac{ab|m|\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}}{b^2+a^2k^2}$$

第八步:利用 $x_1x_2=\dfrac{a^2m^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$， $y_1y_2=\dfrac{-k^2a^2b^2+m^2b^2}{b^2+a^2k^2}$， 计算 $x_1x_2+y_1y_2$

第九步：利用 $x_1x_2=\dfrac{a^2m^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$， $y_1y_2=\dfrac{-k^2a^2b^2+m^2b^2}{b^2+a^2k^2}$ 计算 $(x_1-a)(x_2-a)+y_1y_2$

知识点二：弦长问题

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$ **（最常用公式，使用频率最高）**

$=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

知识点三：弦长问题

设直线和曲线的两个交点 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程，得 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$； $\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$；

将两式相减，可得 $\dfrac{{x_1}^2-{x_2}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2-{y_2}^2}{b^2}=0$；$\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}=-\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}$；

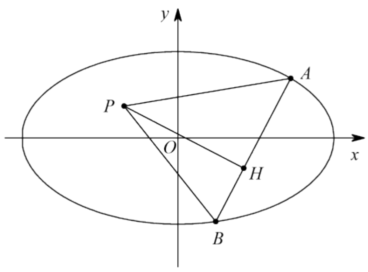
最后整理得：$1=-\dfrac{a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $1=-k\cdot\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}$

同理，双曲线用点差法，式子可以整理成：$1=\dfrac{a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $1=k\cdot\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}$

设直线和曲线的两个交点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入抛物线方程，得 ${y_1}^2=2px_1$； ${y_2}^2=2px_2$；

将两式相减，可得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2)$；整理得：

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}$$



知识点四：圆锥曲线中的三角形的面积

1、三角形面积问题

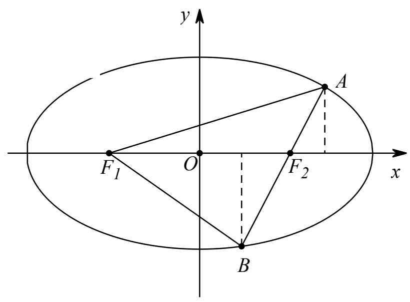
直线 AB 方程：$y=kx+m$ $\qquad d=|PH|=\dfrac{|kx_0-y_0+m|}{\sqrt{1+k^2}}$

$$S_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{|A'|}\cdot\frac{|kx_0-y_0+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}|kx_0-y_0+m|}{2|A'|}$$

2、焦点三角形的面积

直线 AB 过焦点 $F_2,\Delta ABF_1$ 的面积为

$$S_{\Delta ABF_1}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=c|y_1-y_2|=\frac{c\sqrt{\Delta}}{|A'|}$$



$$\mathrm{S}_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|AB|\,\mathrm{d}=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2}\,\frac{\sqrt{4a^2b^2(a^2A^2+b^2B^2-C^2)}}{a^2A^2+b^2B^2}\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$=\frac{ab\sqrt{(a^2A^2+b^2B^2-C^2)\mathrm{C}^2}}{a^2A^2+b^2B^2}$$

注意：A' 为联立消去 x 后关于 y 的一元二次方程的二次项系数

提升·必考题型归纳

必考题型一：直线与圆锥曲线的位置关系

例 1．（1）、（2023·四川南充·统考一模）已知直线 $kx-y+2=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{m}=1$ 恒有公共点，则实数 m 的取值范围（　）

A．$(4,9]$　　　　B．$[4,+\infty)$

C．$[4,9)\cup(9,+\infty)$　　　　D．$(9,+\infty)$

【答案】C

【分析】根据直线 $kx-y+2=0$ 所过定点以及方程 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{m}=1$ 表示椭圆来求得 m 的取值范围.

【详解】直线 $kx-y+2=0$ 过定点 $(0,2)$，

所以 $\frac{0}{9}+\frac{2^2}{m}\le 1$，解得 $m\ge 4$ ①.

由于方程 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{m}=1$ 表示椭圆，所以 $m>0$ 且 $m\ne 9$ ②.

由①②得 m 的取值范围是 $[4,9)\cup(9,+\infty)$.

故选：C

（2）、（2022·陕西·统考一模）已知直线 $y=kx-1$ 与焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{b}=1$ 总有公共点，则 b 的取值范围是_________.

【答案】$1\le b<2$

【分析】求出直线所过定点，由定点在椭圆内部或椭圆上，得出参数范围，同时注意椭圆的焦点在 x 轴对参数范围的限制.

【详解】由题意直线 $y=kx-1$ 恒过定点 $N(0,-1)$，要使直线 $y=kx-1$ 与焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{b}=1$ 总有公共点，则只需要点 $N(0,-1)$ 在椭圆上或椭圆内，$\therefore b\ge 1$，

又焦点在 x 轴上，$\therefore b<2$.$\therefore 1\le b<2$.

故答案为：$1\le b<2$.

小试牛刀

1．**（2023·广东肇庆·肇庆市第一中学校考模拟预测）**若直线 $y=kx-1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 恒有公共点，则实数 m 的取值范围是_______.

【答案】$m \geq 1$ 且 $m \neq 5$

【分析】根据直线方程写出其所过定点，结合其与椭圆的位置关系，可得答案.

【详解】由直线 $y=kx-1$，则可知其过定点 $(0,-1)$，

易知当该点在椭圆内或椭圆上时，直线与椭圆恒有公共点，

则 $\begin{cases} m>0 \\ \dfrac{0^2}{5}+\dfrac{(-1)^2}{m} \leq 1 \\ m \neq 5 \end{cases}$，解得 $m \geq 1$ 且 $m \neq 5$.

故答案为：$m \geq 1$ 且 $m \neq 5$.

2．（**2023·重庆北碚·校联考模拟预测**）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，直线 $l: y=2x+m$，若椭圆上存在关于直线 l 对称的两点，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

C．$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$　　D．$\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

【答案】D

【分析】设椭圆上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 关于直线 $l: y=2x+m$ 对称，则可设直线 AB 方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+t$，将其与椭圆方程联立，令 $\Delta>0$，可算出 t 的范围，又线段 AB 的中点 $M(x_0, y_0)$ 也在直线 $l: y=2x+m$ 上，结合韦达定理可以算出 m, t 的关系式，从而得解.

【详解】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，线段 AB 的中点 $M(x_0, y_0)$，

若此椭圆上存在不同的两点 A, B 关于直线 $l: y=2x+m$ 对称，

所以直线 AB 的方程可以设为 $y=-\dfrac{1}{2}x+t$，

联立 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ y=-\dfrac{1}{2}x+t \end{cases}$，化为 $x^2-2tx+2t^2-2=0$，

$\Delta=4t^2-4(2t^2-2)>0$，解得 $t^2<2, -\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$，

而 $x_1+x_2=2t$，所以 $x_0=t, y_0=-\dfrac{1}{2}x_0+t=-\dfrac{1}{2}t+t=\dfrac{1}{2}t$，即 $M\left(t, \dfrac{t}{2}\right)$，

代入直线 $l: y=2x+m$ 可得 $\dfrac{t}{2}=2t+m$，