

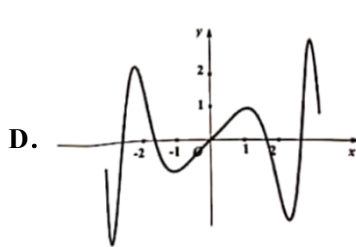
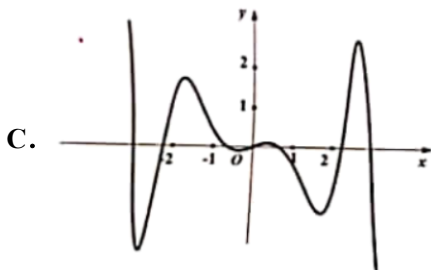
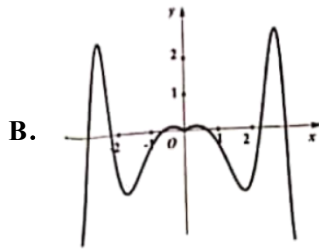
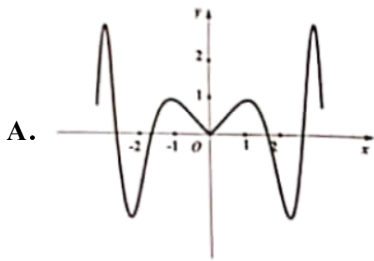
# 福建省福安市一中 2025 届高三 4 月暑期摸底考试数学试题试卷

## 注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $(3, -4)$ ，则  $\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} =$ 
  - A.  $-\frac{1}{5}$
  - B.  $\frac{37}{15}$
  - C.  $\frac{37}{20}$
  - D.  $\frac{13}{15}$
2. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} - a_n = 2$ ，且  $a_1, a_3, a_4$  成等比数列。若  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，则  $S_n$  的最小值为 ( )
  - A. -10
  - B. -14
  - C. -18
  - D. -20
3. 已知集合  $A = \{x | y = \lg(4 - x^2)\}$ ， $B = \{y | y = 3^x, x > 0\}$  时， $A \cap B =$  ( )
  - A.  $\{x | x > -2\}$
  - B.  $\{x | 1 < x < 2\}$
  - C.  $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$
  - D.  $\emptyset$
4. 已知数列  $\{a_n\}$  是公比为 2 的正项等比数列，若  $a_m, a_n$  满足  $2a_n < a_m < 1024a_n$ ，则  $(m-1)^2 + n$  的最小值为 ( )
  - A. 3
  - B. 5
  - C. 6
  - D. 10
5. 函数  $f(x) = x \cos 2^{|x|}$  的图象可能为 ( )



6. 已知  $m, n$  表示两条不同的直线， $\alpha, \beta$  表示两个不同的平面，且  $m \perp \alpha, n \subset \beta$ ，则“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $m \parallel n$ ”的( )条件。
  - A. 充分不必要
  - B. 必要不充分
  - C. 充要
  - D. 既不充分也不必要

7. 若函数  $f(x) = (x^2 - mx + 2)e^x$  ( $e = 2.71828\dots$  为自然对数的底数) 在区间  $[1, 2]$  上不是单调函数, 则实数  $m$  的取值范围是( )

- A.  $\left[\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right]$       B.  $\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right)$       C.  $\left[2, \frac{10}{3}\right]$       D.  $\left(2, \frac{10}{3}\right)$

8. 执行程序框图, 则输出的数值为 ( )



- A. 12      B. 29      C. 70      D. 169

9. 设复数  $z$  满足  $|z| = \frac{z + \bar{z}}{2} + 1$ ,  $z$  在复平面内对应的点的坐标为  $(x, y)$  则 ( )

- A.  $x^2 = 2y + 1$       B.  $y^2 = 2x + 1$   
 C.  $x^2 = 2y - 1$       D.  $y^2 = 2x - 1$

10. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq a \\ 5 - x, & x > a \end{cases}$  ( $a > 0$ ), 若函数  $g(x) = f(x) - 4|x|$  有三个零点, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(0, 1) \cup [5, +\infty)$       B.  $(0, \frac{6}{5}) \cup [5, +\infty)$   
 C.  $(1, 5]$       D.  $(\frac{6}{5}, 5]$

11. 已知复数  $z$  满足  $z(1+i) = 1-i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z$  的虚部为 ( )

- A.  $-i$       B.  $i$       C.  $1$       D.  $-1$

12. 已知集合  $A = \{x | x \leq a, a \in R\}$ ,  $B = \{x | 2^x < 16\}$ , 若  $A \cap B$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

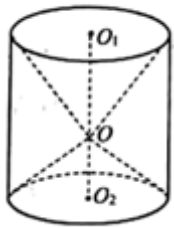
- A.  $\emptyset$       B.  $R$       C.  $(-\infty, 4]$       D.  $(-\infty, 4)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 数列  $\{a_n\}$  满足递推公式  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ , 且  $a_1 = a_2$ ,  $a_{2019} \cdot a_{2020} = 2020$ , 则  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2019}^2 =$  \_\_\_\_\_.

14. 如图, 在体积为  $V$  的圆柱  $O_1O_2$  中, 以线段  $O_1O_2$  上的点  $O$  为顶点, 上下底面为底面的两个圆锥的体积分别为  $V_1$ ,

$V_2$ , 则  $\frac{V_1+V_2}{V}$  的值是\_\_\_\_\_.



15. 设  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_n > 0$ ,  $a_1 = 1$ , 且  $2S_n = a_n(a_n + t)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 则  $S_{10} =$ \_\_\_\_\_.

16. 过点  $A(-3, 2), B(-5, -2)$ , 且圆心在直线  $3x - 2y + 4 = 0$  上的圆的半径为\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

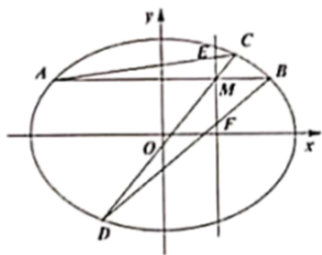
17. (12 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \cos \alpha \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数})$$
 . 以原点  $O$  为极点,  $x$  轴

的正半轴为极轴, 且两个坐标系取相等的长度单位, 建立极坐标系.

(1) 设直线  $l$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{12}$ , 若直线  $l$  与曲线  $C$  交于两点  $A, B$ , 求  $AB$  的长;

(2) 设  $M, N$  是曲线  $C$  上的两点, 若  $\angle MON = \frac{\pi}{2}$ , 求  $\triangle OMN$  面积的最大值.

18. (12 分) 如图, 过点  $M(2, 2)$  且平行于  $x$  轴的直线交椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = m (m > 0)$  于  $A, B$  两点, 且  $\overline{AM} = 3\overline{MB}$ .



(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过点  $M$  且斜率为正的直线交椭圆于段  $C, D$ , 直线  $AC, BD$  分别交直线  $x = 2$  于点  $E, F$ , 求证:  $\frac{1}{|ME|} - \frac{1}{|MF|}$

是定值.

19. (12 分) 已知函数  $f(x) = |x - 2| - |x + 1|$ .

(I) 解不等式  $f(x) > 1$ ;

(II) 当  $x > 0$  时, 若函数  $g(x) = \frac{ax^2 - x + 1}{x} (a > 0)$  的最小值恒大于  $f(x)$ , 求实数  $a$  的取值范围.

20. (12分) 已知函数  $f(x) = ax + \ln x (a \in R)$  有两个零点  $x_1, x_2$ .

(1) 求  $a$  的取值范围;

(2) 是否存在实数  $\lambda$ , 对于符合题意的任意  $x_1, x_2$ , 当  $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 > 0$  时均有  $f'(x) < 0$ ?

若存在, 求出所有  $\lambda$  的值; 若不存在, 请说明理由.

21. (12分) 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 它的四个顶点构成的四边形面积为  $2\sqrt{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设  $P$  是直线  $x = a^2$  上任意一点, 过点  $P$  作圆  $x^2 + y^2 = a^2$  的两条切线, 切点分别为  $M, N$ , 求证: 直线  $MN$  恒过一个定点.

22. (10分) 已知函数  $y = f(x)$  与  $y = e^x$  的图象关于直线  $y = x$  对称. ( $e$  为自然对数的底数)

(1) 若  $y = f(x)$  的图象在点  $A(x_0, f(x_0))$  处的切线经过点  $(-e, -1)$ , 求  $x_0$  的值;

(2) 若不等式  $f(x) \geq \frac{1}{2}ax^2 - (1-a)x - 1$  恒成立, 求正整数  $a$  的最小值.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D

【解析】

因为角  $\alpha$  的终边经过点  $(3, -4)$ , 所以  $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ , 则  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,

即  $\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{13}{15}$ . 故选 D.

2. D

【解析】

利用等比中项性质可得等差数列的首项，进而求得  $S_n$ ，再利用二次函数的性质，可得当  $n = 4$  或  $5$  时， $S_n$  取到最小值.

【详解】

根据题意，可知  $\{a_n\}$  为等差数列，公差  $d = 2$ ，

由  $a_1, a_3, a_4$  成等比数列，可得  $a_3^2 = a_1 a_4$ ，

$\therefore (a_1 + 4)^2 = a_1(a_1 + 6)$ ，解得  $a_1 = -8$ 。

$\therefore S_n = -8n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 9n = (n - \frac{9}{2})^2 - \frac{81}{4}$ 。

根据单调性，可知当  $n = 4$  或  $5$  时， $S_n$  取到最小值，最小值为  $-20$ 。

故选：D.

本题考查等差数列通项公式、等比中项性质、等差数列前  $n$  项和的最值，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意当  $n = 4$  或  $5$  时同时取到最值.

3. B

【解析】试题分析：由集合 A 中的函数  $\square = \lg(4 - \square^2)$ ，得到  $4 - \square^2 > 0$ ，解得  $-2 < \square < 2$ ， $\therefore$  集合  $\square = \{\square \mid -2 < \square < 2\}$ ，

由集合 B 中的函数  $\square = 3^{\square}$ ， $\square > 0$ ，得到  $\square > 1$ ， $\therefore$  集合  $\square = \{\square \mid \square > 1\}$ ，则  $\square \cap \square = \{\square \mid 1 < \square < 2\}$ ，故选 B.

考点：交集及其运算.

4. B

【解析】

利用等比数列的通项公式和指数幂的运算法则、指数函数的单调性求得  $1 < m - n < 10$  再根据此范围求  $(m-1)^2 + n$  的最小值.

【详解】

Q 数列  $\{a_n\}$  是公比为 2 的正项等比数列,  $a_m$ 、 $a_n$  满足  $2a_n < a_m < 1024a_n$ ,

由等比数列的通项公式得  $2a_1 \cdot 2^{n-1} < a_1 \cdot 2^{m-1} < 1024a_1 \cdot 2^{n-1}$ , 即  $2^n < 2^{m-1} < 2^{n+9}$ ,

$\therefore 2 < 2^{m-n} < 2^{10}$ , 可得  $1 < m-n < 10$ , 且  $m$ 、 $n$  都是正整数,

求  $(m-1)^2 + n$  的最小值即求在  $1 < m-n < 10$ , 且  $m$ 、 $n$  都是正整数范围下求  $m-1$  最小值和  $n$  的最小值, 讨论  $m$ 、 $n$  取值.

$\therefore$  当  $m=3$  且  $n=1$  时,  $(m-1)^2 + n$  的最小值为  $(3-1)^2 + 1 = 5$ .

故选: B.

本题考查等比数列的通项公式和指数幂的运算法则、指数函数性质等基础知识, 考查数学运算求解能力和分类讨论思想, 是中等题.

5. C

【解析】

先根据  $f(x)$  是奇函数, 排除 A, B, 再取特殊值验证求解.

【详解】

因为  $f(-x) = -x \cos 2^{-x} = -x \cos 2^{|x|} = -f(x)$ ,

所以  $f(x)$  是奇函数, 故排除 A, B,

又  $f(1) = \cos 2 < 0$ ,

故选: C

本题主要考查函数的图象, 还考查了理解辨析的能力, 属于基础题.

6. B

【解析】

根据充分必要条件的概念进行判断.

【详解】

对于充分性: 若  $\alpha \perp \beta$ , 则  $m, n$  可以平行, 相交, 异面, 故充分性不成立;

若  $m // n$ , 则  $n \perp \alpha, n \subset \beta$ , 可得  $\alpha \perp \beta$ , 必要性成立.

故选: B

本题主要考查空间中直线, 线面, 面面的位置关系, 以及充要条件的判断, 考查学生综合运用知识的能力. 解决充要条件判断问题, 关键是要弄清楚谁是条件, 谁是结论.

7. B

**【解析】**

求得  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$ ，由此构造函数  $g(x) = x^2 + (2-m)x + 2-m$ ，根据题意可知  $g(x)$  在  $(1,2)$  上有变号零点.

由此令  $g(x) = 0$ ，利用分离常数法结合换元法，求得  $m$  的取值范围.

**【详解】**

$$f'(x) = e^x [x^2 + (2-m)x + 2-m],$$

$$\text{设 } g(x) = x^2 + (2-m)x + 2-m,$$

要使  $f(x)$  在区间  $[1,2]$  上不是单调函数，

即  $g(x)$  在  $(1,2)$  上有变号零点，令  $g(x) = 0$ ，

$$\text{则 } x^2 + 2x + 2 = m(x+1),$$

令  $t = x+1 \in (2,3)$ ，则问题即  $m = t + \frac{1}{t}$  在  $t \in (2,3)$  上有零点，由于  $t + \frac{1}{t}$  在  $(2,3)$  上递增，所以  $m$  的取值范围是

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right).$$

故选：B

本小题主要考查利用导数研究函数的单调性，考查方程零点问题的求解策略，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

8. C

**【解析】**

由题知：该程序框图是利用循环结构计算并输出变量  $b$  的值，计算程序框图的运行结果即可得到答案.

**【详解】**

$$a = 0, b = 1, n = 1, b = 0 + 2 = 2, n < 5, \text{ 满足条件,}$$

$$a = \frac{2-0}{2} = 1, n = 2, b = 1 + 4 = 5, n < 5, \text{ 满足条件,}$$

$$a = \frac{5-1}{2} = 2, n = 3, b = 2 + 10 = 12, n < 5, \text{ 满足条件,}$$

$$a = \frac{12-2}{2} = 5, n = 4, b = 5 + 24 = 29, n < 5, \text{ 满足条件,}$$

$$a = \frac{29-5}{2} = 12, n = 5, b = 12 + 58 = 70, n = 5, \text{ 不满足条件,}$$

输出  $b = 70$ .

故选：C

本题主要考查程序框图中的循环结构，属于简单题.

9. B

**【解析】**

根据共轭复数定义及复数模的求法，代入化简即可求解.

**【详解】**

$z$  在复平面内对应的点的坐标为  $(x, y)$ ，则  $z = x + yi$ ，

$$\bar{z} = x - yi,$$

$$\therefore |z| = \frac{z + \bar{z}}{2} + 1,$$

$$\text{代入可得 } \sqrt{x^2 + y^2} = x + 1,$$

$$\text{解得 } y^2 = 2x + 1.$$

故选：B.

本题考查复数对应点坐标的几何意义，复数模的求法及共轭复数的概念，属于基础题.

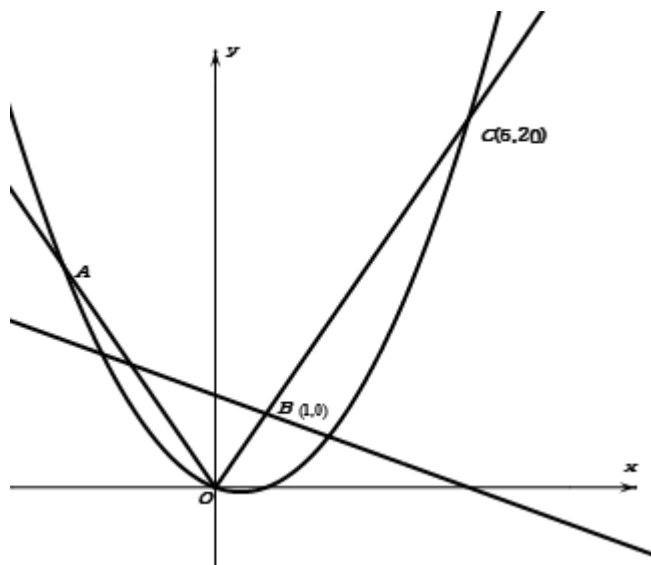
10. A

**【解析】**

分段求解函数零点，数形结合，分类讨论即可求得结果.

**【详解】**

作出  $y = x^2 - x$  和  $y = 5 - x$ ， $y = 4|x|$  的图像如下所示：



函数  $g(x) = f(x) - 4|x|$  有三个零点，

等价于  $y = f(x)$  与  $y = 4|x|$  有三个交点，



又因为  $a > 0$ ，且由图可知，

当  $x \leq 0$  时  $y = f(x)$  与  $y = 4|x|$  有两个交点  $A, O$ ，

故只需当  $x > 0$  时， $y = f(x)$  与  $y = 4|x|$  有一个交点即可。

若当  $x > 0$  时，

$a \in (0, 1)$  时，显然  $y = f(x)$  与  $y = 4|x|$  有一个交点  $B$ ，故满足题意；

$a = 1$  时，显然  $y = f(x)$  与  $y = 4|x|$  没有交点，故不满足题意；

$a \in (1, 5)$  时，显然  $y = f(x)$  与  $y = 4|x|$  也没有交点，故不满足题意；

$a \in [5, +\infty)$  时，显然  $y = f(x)$  与  $y = 4|x|$  有一个交点  $C$ ，故满足题意。

综上所述，要满足题意，只需  $a \in (0, 1) \cup [5, +\infty)$ 。

故选：A.

本题考查由函数零点的个数求参数范围，属中档题。

11. D

**【解析】**

根据复数  $z$  满足  $z(1+i) = 1-i$ ，利用复数的除法求得  $z$ ，再根据复数的概念求解。

**【详解】**

因为复数  $z$  满足  $z(1+i) = 1-i$ ，

$$\text{所以 } z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i,$$

所以  $z$  的虚部为  $-1$ 。

故选：D.

本题主要考查复数的概念及运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题。

12. D

**【解析】**

先化简  $B = \{x | 2^x < 16\} = \{x | x < 4\}$ ，再根据  $A = \{x | x \leq a, a \in R\}$ ，且  $A \square B$  求解。

**【详解】**

因为  $B = \{x | 2^x < 16\} = \{x | x < 4\}$ ，

又因为  $A = \{x | x \leq a, a \in R\}$ ，且  $A \square B$ ，

所以  $a < 4$ 。

故选：D

本题主要考查集合的基本运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

## 二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2020

### 【解析】

可对  $a_{n+1} = a_{n+2} - a_n$  左右两端同乘以  $a_{n+1}$  得  $a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+1}$ ,

依次写出  $a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n$ ,  $a_{n-1}^2 = a_{n-1} a_n - a_{n-2} a_{n-1}$ ,  $\dots$ ,  $a_2^2 = a_2 a_3 - a_1 a_2$ , 累加可得  $a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_1 a_2$ , 再

由  $a_1 = a_2$  得  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$ , 代入  $n = 2019$  即可求解

### 【详解】

$a_{n+1} = a_{n+2} - a_n$  左右两端同乘以  $a_{n+1}$  有  $a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+1}$ , 从而  $a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n$ ,  $a_{n-1}^2 = a_{n-1} a_n - a_{n-2} a_{n-1}$ ,  $\dots$ ,

$a_2^2 = a_2 a_3 - a_1 a_2$ , 将以上式子累加得  $a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_1 a_2$ .

由  $a_1 = a_2$  得  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$ . 令  $n = 2019$ , 有  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2019}^2 = a_{2019} \cdot a_{2020} = 2020$ .

故答案为：2020

本题考查数列递推式和累加法的应用，属于基础题

14.  $\frac{1}{3}$

### 【解析】

根据圆柱  $O_1 O_2$  的体积为  $V$ , 以及圆锥的体积公式, 计算即得.

### 【详解】

由题得,  $V_1 + V_2 = \frac{1}{3} S_{e O_1} \cdot O O_1 + \frac{1}{3} S_{e O_2} \cdot O O_2 = \frac{1}{3} S_{e O_1} \cdot O_1 O_2 = \frac{1}{3} V$ , 得  $\frac{V_1 + V_2}{V} = \frac{1}{3}$ .

故答案为:  $\frac{1}{3}$

本题主要考查圆锥体的体积, 是基础题.

15. 55

### 【解析】

由  $2a_1 = 2S_1 = a_1(a_1 + t)$  求出  $t = 1$ . 由  $2S_n = a_n(a_n + 1)$ , 可得  $2S_{n-1} = a_{n-1}(a_{n-1} + 1)$ , 两式相减, 可得数列  $\{a_n\}$  是以 1

为首项, 1 为公差的等差数列, 即求  $S_{10}$ .

### 【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/578065047105007005>