青海省西宁市五中、四中、十四中2023-2024学年高三（实验班）第一次模拟数学试题试卷

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知$\left(x+a\right)^{5}$展开式的二项式系数和与展开式中常数项相等，则x^{2}项系数为（　　）

A．10　　**B．32**　　**C．40**　　**D．80**

2．三棱锥$S-ABC$的各个顶点都在求O的表面上，且ΔABC是等边三角形，$SA\perp$底面ABC，$SA=4$，$AB=6$，若点D在线段SA上，且$AD=2SD$，则过点D的平面截球O所得截面的最小面积为（　　）

A．3π　　B．4π　　C．8π　　D．13π

3．“幻方”最早记载于我国公元前**500**年的春秋时期《大戴礼》中．“n阶幻方$\left(n\geq 3,n\in \mathbf{N}^{*}\right)$”是由前$n^{2}$个正整数组成的—个$n$阶方阵，其各行各列及两条对角线所含的$n$个数之和（简称幻和）相等，例如“**3**阶幻方”的幻和为**15**（如图所示）．则“**5**阶幻方”的幻和为（ ）

8	1	6
3	5	7
4	9	2

A．75　　**B．65**　　**C．55**　　**D．45**

4．设α为锐角，若$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则$\sin 2\alpha$的值为（　　）

A．$\frac{17}{25}$　　B．$-\frac{7}{25}$　　C．$-\frac{17}{25}$　　D．$\frac{7}{25}$

5．设递增的等比数列$\left\{a_{n}\right\}$的前n项和为S_{n}，已知$S_{4}=\frac{40}{3}$，$3a_{4}-10a_{3}+3a_{2}=0$，则$a_{4}=$（　　）

A．9　　**B．27**　　**C．81**　　**D．**$\frac{8}{3}$

6．“完全数”是一些特殊的自然数，它所有的真因子（即除了自身以外的约数）的和恰好等于它本身.古希腊数学家毕达哥拉斯公元前六世纪发现了第一、二个“完全数”6和28，进一步研究发现后续三个完全数”分别为496，8128，33550336，现将这五个“完全数”随机分为两组，一组2个，另一组3个，则6和28不在同一组的概率为（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　　　B．$\dfrac{2}{5}$　　　　C．$\dfrac{3}{5}$　　　　D．$\dfrac{4}{5}$

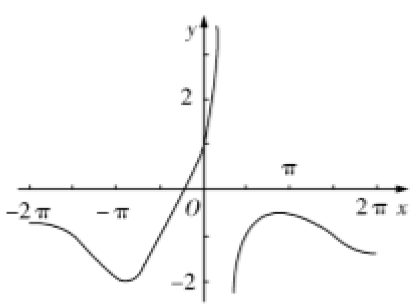
7．已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，若 $\alpha=a+\dfrac{1}{a}$，$\beta=b+\dfrac{1}{b}$，则 $\alpha+\beta$ 的最小值是（　　）

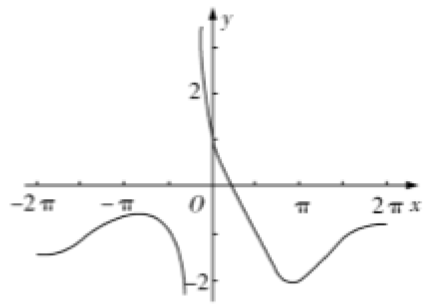
A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

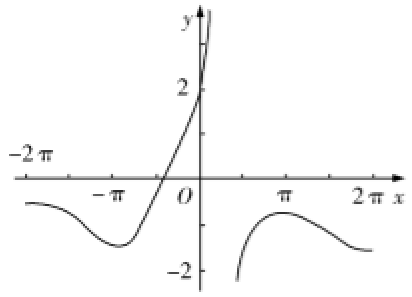
8．若直线 $2x+4y+m=0$ 经过抛物线 $y=2x^2$ 的焦点，则 $m=$（　　）

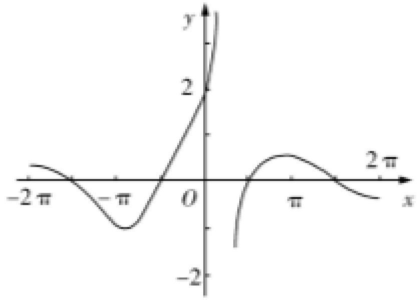
A．$\dfrac{1}{2}$　　　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　　　C．2　　　　D．-2

9．函数 $f(x)=\dfrac{\cos x+x}{\cos x-x}$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 的图象大致为

A．

B．

C．

D．

10．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x\middle|3\le x<7\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-7x+10<0\right\}$，则 $\complement_U(A\cap B)=$（　　）

A．$(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$　　　　B．$(-\infty,3]\cup(5,+\infty)$

C．$(-\infty,3]\cup[5,+\infty)$　　　　D．$(-\infty,3)\cup[5,+\infty)$

11．已知 $a+bi\ (a,b\in R)$ 是 $\dfrac{1+i}{1-i}$ 的共轭复数,则 $a+b=$（　　）

A．-1　　　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　　　C．$\dfrac{1}{2}$　　　　D．1

12．已知抛物线 $C:y^2=4x$ 和点 $D(2,0)$，直线 $x=ty-2$ 与抛物线 C 交于不同两点 A，B，直线 BD 与抛物线 C 交于另一点 E．给出以下判断：

①直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 -2；

② $AE//y$ 轴；

③以 BE 为直径的圆与抛物线准线相切.

其中，所有正确判断的序号是（　　）

A．①②③　　　　B．①②　　　　C．①③　　　　D．②③

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设 F_1，F_2 分别是椭圆 **C**：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，直线 **l** 过 F_1 交椭圆 **C** 于 **A**，**B** 两点，交 **y** 轴于 **E** 点，若满足 $\overrightarrow{F_1E}=2\overrightarrow{AF_1}$，且 $\angle EF_1F_2=60^\circ$，则椭圆 **C** 的离心率为______.

14．不等式 $ax+1+lnx\le xe^x$ 对于定义域内的任意 x 恒成立，则 a 的取值范围为__________.

15．某种圆柱形的如罐的容积为 128π 个立方单位，当它的底面半径和高的比值为______.时，可使得所用材料最省.

16．已知边长为 $4\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60^\circ$，现沿对角线 BD 折起，使得二面角 $A-BD-C$ 为 120°，此时点 A，B，C，D 在同一个球面上，则该球的表面积为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）.以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）设点 $M\left(0,1\right)$，若直线 l 与曲线 C 相交于 A、B 两点，求 $|MA|+|MB|$ 的值

18．（12 分）为了响应国家号召，促进垃圾分类，某校组织了高三年级学生参与了“垃圾分类，从我做起”的知识问卷作答随机抽出男女各 20 名同学的问卷进行打分，作出如图所示的茎叶图，成绩大于 70 分的为“合格”.

男		女
6	9	3 6 7 9 9
9 5 1 0	8	0 1 5 6
9 9 4 4 2	7	3 4 5 7 7 7 8
8 8 5 1 1 0	6	0 7
4 3 3 2	5	2 5

（Ⅰ）由以上数据绘制成 2×2 联表，是否有 95%以上的把握认为“性别”与“问卷结果”有关？

	男	女	总计
合格			
不合格			
总计			

（Ⅱ）从上述样本中，成绩在 60 分以下（不含 60 分）的男女学生问卷中任意选 2 个，记来自男生的个数为 X，求 X

的分布列及数学期望.

附：

$P\left(k^2\geq k_0\right)$	**0.100**	**0.050**	**0.010**	**0.001**
k_0	**2.706**	**3.841**	**6.635**	**10.828**

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\qquad n=a+b+c+d$$

19.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=e^x\left(ax+1\right)$，$a\in R$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $M\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）判断函数 $f\left(x\right)$ 的零点个数.

20.（12 分）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $2S_n=n-n^2$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\begin{cases}2^{a_n}, & (n=2k-1)\\ \dfrac{2}{\left(1-a_n\right)\left(1-a_{n+2}\right)}, & (n=2k)\end{cases}$（$k\in\mathbf{N}^*$），数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n.若 $T_{2n}=a\left(\dfrac{1}{4}\right)^n-\dfrac{1}{2n+2}+b$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求实数 a，b 的值.

21.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 π，且当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f\left(x\right)$ 取得最大值 2.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）作出 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的图象（要列表）.

22.（10 分）设函数 $f\left(x\right)=alnx+x^2-\left(a+2\right)x$,其中 $a\in R$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(2，f\left(2\right)\right)$ 处切线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$，求 a 的值;

(Ⅱ)已知导函数 $f'\left(x\right)$ 在区间 $\left(1，e\right)$ 上存在零点，证明:当 $x\in\left(1，e\right)$ 时，$f\left(x\right)>-e^2$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

根据二项式定理通项公式$T_{r+1}=C_n^r a^r b^{n-r}$可得常数项，然后二项式系数和，可得$a$，最后依据$T_{r+1}=C_n^r a^r b^{n-r}$，可得结果.

【详解】

由题可知：$T_{r+1}=C_5^r x^r a^{5-r}$

当$r=0$时，常数项为$T_1=a^5$

又$\left(x+a\right)^5$展开式的二项式系数和为2^5

由$a^5=2^5 \Rightarrow a=2$

所以$T_{r+1}=C_5^r x^r 2^{5-r}$

当$r=2$时，$T_3=C_5^2 x^2 2^3=80x^2$

所以x^2项系数为80

故选：D

【点睛】

本题考查二项式定理通项公式，熟悉公式，细心计算，属基础题.

2、A

【解析】

由题意画出图形，求出三棱锥 *S-ABC* 的外接球的半径，再求出外接球球心到 *D* 的距离，利用勾股定理求得过点 *D* 的平面截球 *O* 所得截面圆的最小半径，则答案可求.

【详解】

如图，设三角形 *ABC* 外接圆的圆心为 *G*，则外接圆半径 *AG*=$\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

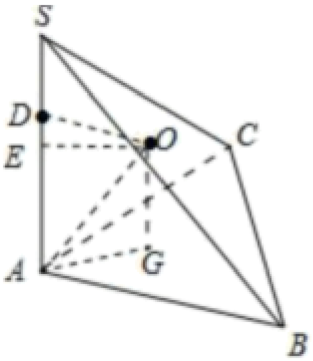
设三棱锥 ***S*-*ABC*** 的外接球的球心为 ***O***，则外接球的半径 ***R***=$\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^{2}+2^{2}}=4$

取 ***SA*** 中点 ***E***，由 ***SA***=4，***AD***=3***SD***，得 ***DE***=1，

所以 ***OD***=$\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{13}$.

则过点 ***D*** 的平面截球 ***O*** 所得截面圆的最小半径为 $\sqrt{4^2-\left(\sqrt{13}\right)^2}=\sqrt{3}$

所以过点 ***D*** 的平面截球 ***O*** 所得截面的最小面积为 $\pi\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=3\pi$



故选：A

【点睛】

本题考查三棱锥的外接球问题，还考查了求截面的最小面积，属于较难题.

3、B

【解析】

计算$1+2+\cdots+25$的和，然后除以5，得到"5 阶幻方"的幻和.

【详解】

依题意"5 阶幻方"的幻和为$\dfrac{1+2+\cdots+25}{5}=\dfrac{\dfrac{1+25}{2}\times 25}{5}=65$，故选 B.

【点睛】

本小题主要考查合情推理与演绎推理，考查等差数列前n项和公式，属于基础题.

4、D

【解析】

用诱导公式和二倍角公式计算.

【详解】

$\sin 2\alpha=-\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{2})=-\cos 2(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=-[2\cos^2(\alpha+\dfrac{\pi}{4})-1]=-[2\times(\dfrac{3}{5})^2-1]=\dfrac{7}{25}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查诱导公式、余弦的二倍角公式，解题关键是找出已知角和未知角之间的联系.

5、A

【解析】

根据两个已知条件求出数列的公比和首项，即得a_4的值.

【详解】

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

由$3a_4-10a_3+3a_2=0$，得$3q^2-10q+3=0$，解得$q=3$或$q=\frac{1}{3}$.

因为$S_4>0$.且数列$\{a_n\}$递增，所以$q=3$.

又$S_4=\frac{a_1\left(1-3^4\right)}{1-3}=\frac{40}{3}$，解得$a_1=\frac{1}{3}$，

故$a_4=\frac{1}{3}\times 3^3=9$.

故选：A

【点睛】

本题主要考查等比数列的通项和求和公式，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

6、C

【解析】

先求出五个“完全数”随机分为两组，一组 2 个，另一组 3 个的基本事件总数为$C_5^2=10$，再求出 6 和 28 恰好在同一组包含的基本事件个数，根据即可求出 6 和 28 不在同一组的概率.

【详解】

解：根据题意，将五个“完全数”随机分为两组，一组 2 个，另一组 3 个，

则基本事件总数为$C_5^2=10$，

则 6 和 28 恰好在同一组包含的基本事件个数$C_2^2+C_3^1=4$，

∴6 和 28 不在同一组的概率$P=\frac{10-4}{10}=\frac{3}{5}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查古典概型的概率的求法，涉及实际问题中组合数的应用.

7、C

【解析】

根据题意，将 a、b 代入$\alpha+\beta$，利用基本不等式求出最小值即可.

【详解】

$\because$**a>0，b>0，a+b=1，**

$\therefore \alpha+\beta=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=1+\frac{1}{ab}\geq 1+\frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=5$，

当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时取“＝”号.

答案：C

【点睛】

本题考查基本不等式的应用，“1”的应用，利用基本不等式求最值时，一定要正确理解和掌握“一正，二定，三相等”的内涵：一正是首先要判断参数是否为正；二定是其次要看和或积是否为定值（和定积最大，积定和最小）；三相等是最后一定要验证等号能否成立，属于基础题.

8、B

【解析】

计算抛物线的交点为$\left(0,\frac{1}{8}\right)$，代入计算得到答案.

【详解】

$y=2x^2$可化为$x^2=\frac{1}{2}y$，焦点坐标为$\left(0,\frac{1}{8}\right)$，故$m=-\frac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查了抛物线的焦点，属于简单题.

9、A

【解析】

因为$f(0)=1$，所以排除C、D．当x从负方向趋近于0时，$0<\cos x+x<\cos x-x$，可得$0<f(x)<1$.故选A.

10、D

【解析】

先计算集合B，再计算$A\mathrm{I}\ \ B$，最后计算ð$_U(A\cap B)$.

【详解】

解：Q $B=\left\{x\middle|x^2-7x+10<0\right\}$

$\therefore B=\{x\,|\,2<x<5\}$，

$\because A=\{x|3\le x<7\}$

$\therefore A\cap B=\{x|3\leq x<5\}$，

$\therefore \complement_U(A\cap B)=(-\infty,3)\cup[5,+\infty)$．

故选：D．

【点睛】

本题主要考查了集合的交，补混合运算，注意分清集合间的关系，属于基础题．

11、**A**

【解析】

先利用复数的除法运算法则求出$\dfrac{1+i}{1-i}$的值，再利用共轭复数的定义求出 ***a*+*bi***，从而确定 ***a***，***b*** 的值，求出 ***a*+*b***．

【详解】

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{2}=i$，

$\therefore a+bi=-i$，

$\therefore a=0$，$b=-1$，

$\therefore a+b=-1$，

故选：A．

【点睛】

本题主要考查了复数代数形式的乘除运算，考查了共轭复数的概念，是基础题．

12、**B**

【解析】

由题意，可设直线DE的方程为$x=my+2$，利用韦达定理判断第一个结论；将$x=ty-2$代入抛物线C的方程可得，$y_Ay_1=8$，从而，$y_A=-y_2$，进而判断第二个结论；设F为抛物线C的焦点，以线段BE为直径的圆为M，则圆心M为线段BE的中点．设B，E到准线的距离分别为d_1，d_2，$\odot M$的半径为R，点M到准线的距离为d，显然B，E，F三点不共线，进而判断第三个结论．

【详解】

解：由题意，可设直线DE的方程为$x=my+2$，

代入抛物线C的方程，有$y^2-4my-8=0$．

设点B，E的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，