函数的奇偶性与单调性

函数的单调性和奇偶性

一、基础知识图表

- 函数性质
  - 单调性
    - 定义
    - 判定方法
      - 定义法
      - 复合函数法
        - 已知函数单调性
      - 图象法
    - 应用
  - 奇偶性
    - 定义
    - 判定方法
      - 定义法
      - 变通法
      - 图象法
    - 图象性质
    - 应用

二、函数的单调性

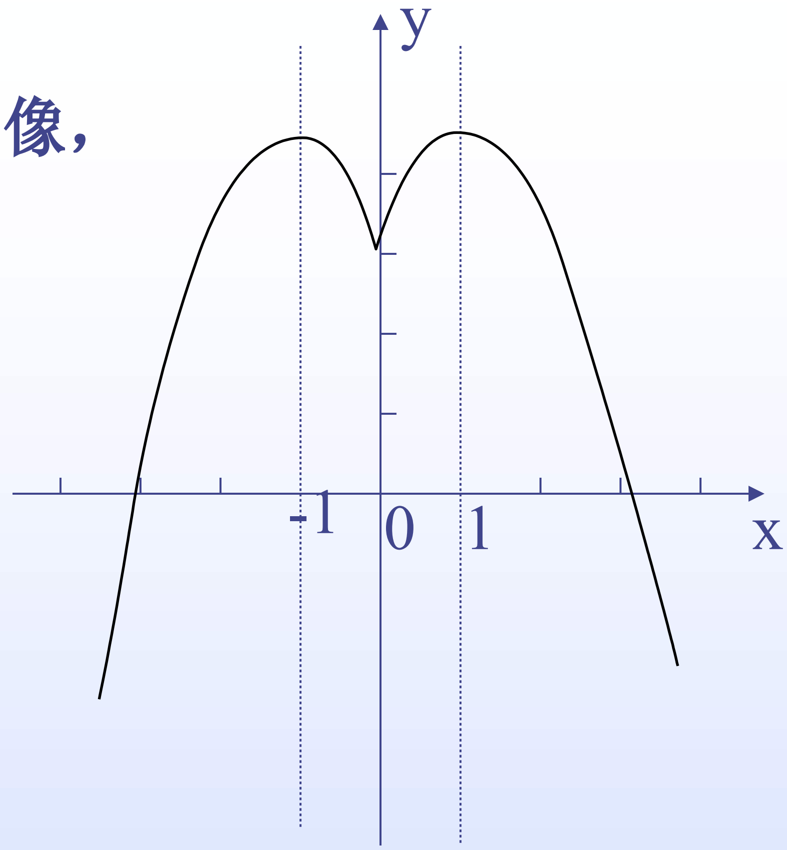
1、 如果对于属于定义域D内某个区间上的任意两个自变量的值x_1，x_2，当$x_1 < x_2$，都有$f(x_1) < f(x_2)$，那么就说f(x)在这个区间上是**增函数**.

2、如果对于属于定义域D内某个区间上的任意两个自变量的值x_1，x_2，当$x_1 < x_2$时，都有$f(x_1) > f(x_2)$，那么就说f(x)在这个区间上是**减函数**.

3、如果函数f(x)在某个区间是增函数或减函数，那么就说f(x)在这一区间具有**单调性**，这一区间叫做f(x)的**单调区间**.

函数图像能直观地显示函数的单调性.在单调区间上的增函数，它的图像是沿x轴正方向逐渐上升的；在单调区间上的减函数，它的图像是沿x轴正方向逐渐下降的.

例1、 画出函数$y=-x^2+2|x|+3$的图像，并指出函数的单调区间.



解： 函数图像如下图所示，

当$x\geq 0$时，$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$；当$x<0$时，$y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$.

在$(-\infty, -1]$和$[0, 1]$上，函数是增函数.

在$[-1, 0]$和$[1, +\infty)$上，函数是减函数.

评析： 函数单调性是对某个区间而言的，对于单独一个点没有增减变化，所以对于区间端点只要函数有意义，都可以带上.

拓展： 已知函数$f(x)=x^2+2(a-1)x+2$在区间$(-\infty，4]$上是减函数，求实数a的取值范围.

分析 要充分运用函数的单调性是以对称轴为界线这一特征.

解： $f(x)=x^2+2(a-1)x+2=[x+(a-1)]^2-(a-1)^2+2$，此二次函数的对称轴是$x=1-a$.因为在区间$(-\infty，1-a]$上$f(x)$是单调递减的，若使$f(x)$在$(-\infty，4]$上单调递减，对称轴$x=1-a$必须在$x=4$的右侧或与其重合，即$1-a\geq 4$，$a\leq -3$.

评析 这是涉及逆向思维的问题，即已知函数的单调性，求字母参数范围，要注意利用数形结合.

变式：在（2,4）上单调呢？不单调呢？

2、若函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax-2a, & x\geq 1,\\ ax+1, & x<1\end{cases}$ 是$(-\infty, +\infty)$上的减函数，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-2,0)$　　B．$[-2,0)$

C．$(-\infty, 1]$　　D．$(-\infty, 0)$

- **探究1.** 如果分段函数为定义域上的减函数，那么在每个分段区间内的单调性是怎样的？
- **探究2.** 要保证分段函数在整个定义域内单调递减，需要满足什么条件？

◆[解析]　由$x\geq 1$时，$f(x)=-x^2+2ax-2a$是减函数，得$a\leq 1$；由$x<1$时，函数$f(x)=ax+1$是减函数，得$a<0$.

◆分段点$x=1$处的值应满足$-1^2+2a\times 1-2a\leq 1\times a+1$，

◆解得$a\geq -2$.所以$-2\leq a<0$.

◆[答案]　B

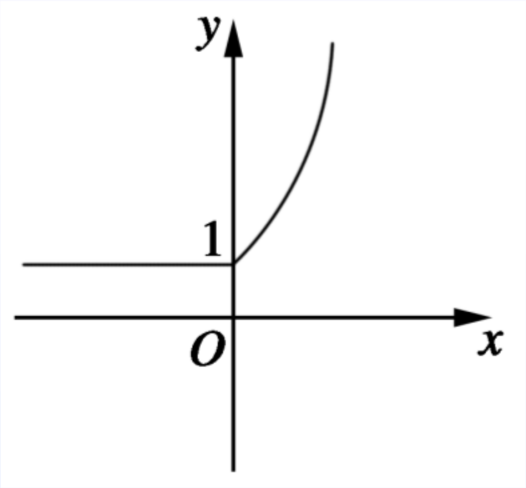
◆[规律总结]　在应用分段函数整体的单调性求解参数的取值范围时，不仅要保证分段函数的每一段上的函数是单调的，而且还要求函数的特殊点——分段点处的值，也要结合函数的单调性比较大小，如本例中的分段点$x=$

跟踪练习1

已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0,\end{cases}$则满足不等式$f(1-x)>f(2x)$的$x$的取值范围是________.

[答案] $(-\infty,\frac{1}{3})$

[解析] 画出函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 的图象，如答图所示.



由 $f(1-x)>f(2x)$，得 $\begin{cases}1-x>0,\\ 2x<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x>2x,\\ 2x\geq 0,\end{cases}$ 解得 $x<0$ 或 $0\leq x<\frac{1}{3}$.所以所求 x 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$.

例3：函数f(x)是定义在（0，+∞）上的增函数，满足：f(xy)=f(x)+f(y)，f(8)=3，解不等式f(x)+f(x-2)≥3

[4，+∞）

注：利用函数的单调性解不等式时，必须考虑条件和定义域

例4：已知函数$f(x)$在R上是增函数，$g(x)$在$[a, b]$上是减函数，求证：$f[g(x)]$在$[a, b]$上是减函数.

证明：

设$x1, x2 \in [a, b]$，且$x1<x2$，
$\because g(x)$在$[a, b]$上单调递减，
$\therefore g(x1) > g(x2)$，
又$f(x)$在R上递增，
而$g(x1) \in R$，$g(x2) \in R$，
$\therefore f[g(x1)] > f[g(x2)]$，
$\therefore f[g(x)]$在$[a, b]$上是减函数.

复合函数的单调性：

已知函数y=f(u)和u=g(x)，u=g(x)在区间（a，b）上具有单调性，当x∈（a，b）时u ∈（m，n）且 y=f(u) 在（m，n） 上也具有单调性，则复合函数y=f[g(x)]在区间（a，b）上具有单调性，

规律如下：

y=f(u)	增↑		减↓	
u=g(x)	增↑	减↓	增↑	减↓
y=f[g(x)]	增↑	减↓	减↓	增↑