2023届福建省泉州市泉港第一中学高三（南充三诊）联合诊断考试数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

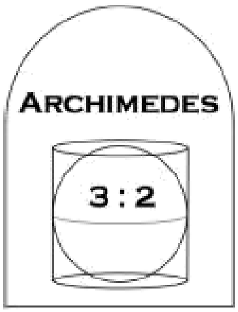
1．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e\ln x}{x^2}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-mf(x)+\dfrac{1}{8}=0$ 有**4**个不同的实数根，则实数 m 的取值范围为（　　）

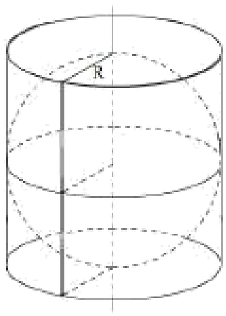
A． $(0,\dfrac{3}{4})$　　**B．** $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$　　**C．** $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{4})$　　**D．** $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$

2．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右顶点分别为 A_1，A_2，虚轴的两个端点分别为 B_1，B_2，若四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π，则双曲线焦距的最小值为（　　）

A．8　　**B．16**　　**C．** $6\sqrt{2}$　　**D．** $12\sqrt{2}$

3．阿基米德（公元前**287**年—公元前**212**年）是古希腊伟大的哲学家、数学家和物理学家，他和高斯、牛顿并列被称为世界三大数学家.据说，他自己觉得最为满意的一个数学发现就是“圆柱内切球体的体积是圆柱体积的三分之二，并且球的表面积也是圆柱表面积的三分之二”.他特别喜欢这个结论，要求后人在他的墓碑上刻着一个圆柱容器里放了一个球，如图，该球顶天立地，四周碰边，表面积为 54π 的圆柱的底面直径与高都等于球的直径，则该球的体积为（　　）





A． 4π　　**B．** 16π　　**C．** 36π　　**D．** $\dfrac{64\pi}{3}$

4．已知随机变量 X 的分布列如下表：

X	-1	**0**	**1**
P	***a***	***b***	***c***

其中 **a**，**b**，$c>0$.若 **X** 的方差 $D\left(X\right)\le\dfrac{1}{3}$ 对所有 $a\in\left(0,1-b\right)$ 都成立，则（　　）

A． $b\le\dfrac{1}{3}$　　　　**B．** $b\le\dfrac{2}{3}$　　　　**C．** $b\ge\dfrac{1}{3}$　　　　**D．** $b\ge\dfrac{2}{3}$

5．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}$（$a>0$，$b>0$）的焦点相同，则双曲线渐近线方程为（　　）

A． $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　　　　**B．** $y=\pm\sqrt{3}x$

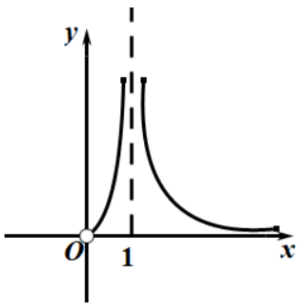
C． $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　　　**D．** $y=\pm\sqrt{2}x$

6．已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等，E 是 SB 的中点，则 AE，SD 所成的角的余弦值为（ ）

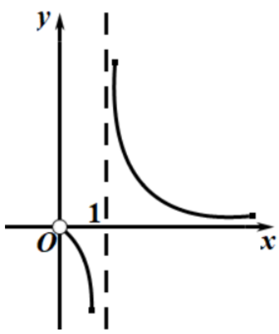
A． $\dfrac{1}{3}$　　　　**B．** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　　　**C．** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　**D．** $\dfrac{2}{3}$

7．已知函数 $f(x)=\dfrac{-2}{\ln(x+1)-x}$,则函数 $y=f(x-1)$ 的图象大致为（　　）

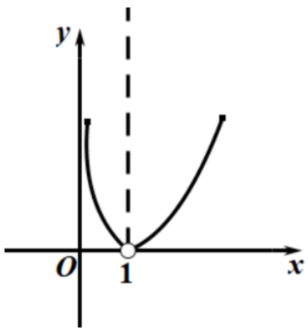
A．



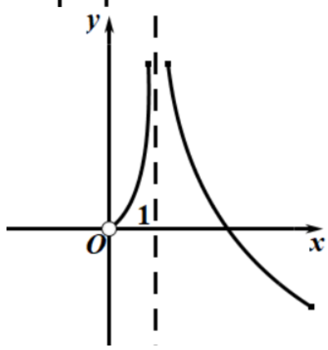
B．



C．



D．



8．已知集合 $M=\left\{x|-2<x<6\right\}$，$N=\left\{x|-3<x<\log_2 35\right\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A． $\left\{x|-2<x<\log_2 35\right\}$　　　　**B．** $\left\{x|-3<x<\log_2 35\right\}$

C． $\left\{x|-3<x<6\right\}$　　　　**D．** $\left\{x|\log_2 35<x<6\right\}$

9．单位正方体 **ABCD-** $A_1B_1C_1D_1$，黑、白两蚂蚁从点 **A** 出发沿棱向前爬行，每走完一条棱称为“走完一段”．白蚂蚁爬地的路线是 $AA_1\to A_1D_1\to\cdot\cdot$，黑蚂蚁爬行的路线是 $AB\to BB_1\to\cdot\cdot$，它们都遵循如下规则：所爬行的第 **i**+2 段与第 **i**

段所在直线必须是异面直线（$i\in N^{*}$）.设白、黑蚂蚁都走完2020段后各自停止在正方体的某个顶点处，这时黑、白两蚂蚁的距离是（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．0

10．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^{x}},x>0\\-x^{2}-2x,x\le 0\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-k(x+\dfrac{1}{2})$ 在 R 上零点最多，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(0,\dfrac{2}{3e})$　　B．$(-\dfrac{2}{3e},0)$　　C．$(-\dfrac{1}{2\sqrt{e}},0)$　　D．$(0,\dfrac{1}{2\sqrt{e}})$

11．“$\alpha\ne\beta$”是$cos\alpha\ne cos\beta$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

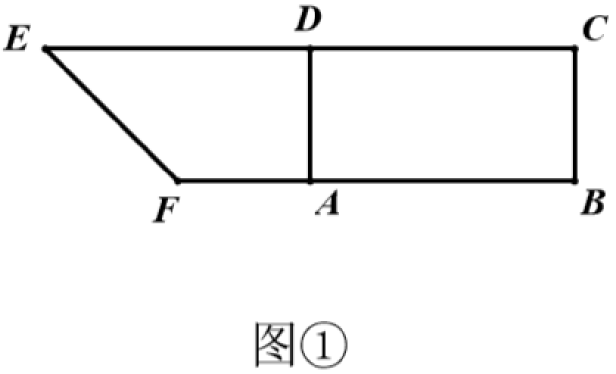
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

12．已知命题 $p:x<2m+1,q:x^{2}-5x+6<0$，且 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围为（　　）

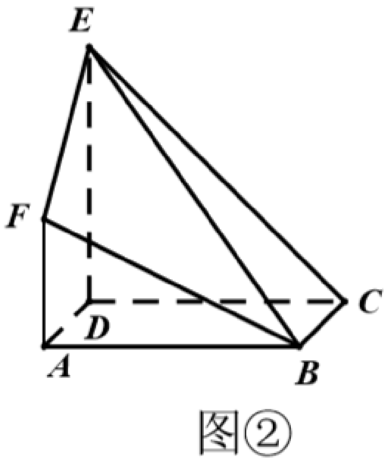
A．$m>\dfrac{1}{2}$　　B．$m\ge\dfrac{1}{2}$　　C．$m>1$　　D．$m\ge 1$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．如图所示，在直角梯形 $BCDF$ 中，$\angle CBF=\angle BCE=90^{\circ}$，$A$、$D$ 分别是 BF、CE 上的点，$AD//BC$，且 $AB=DE=2BC=2AF$（如图①）.将四边形 $ADEF$ 沿 AD 折起，连接 BE、BF、CE（如图②）.在折起的过程中，则下列表述：



图①



图②

①$AC//$平面 BEF；

②四点 B、C、E、F 可能共面；

③若 $EF\perp CF$，则平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$；

④平面 BCE 与平面 BEF 可能垂直.其中正确的是__________.

14．命题“对任意 $x>1$，$x^{2}>1$”的否定是________.

15．若$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则$\cos\alpha=$__________.

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{-x}-\frac{3}{2},x\ldots 0\\ 2^{x}-\frac{3}{2},x<0\end{cases}$，若$f\left(3m-1\right)>f\left(2-m\right)$，则实数$m$的取值范围为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）设直线l与抛物线$x^2=2y$交于A,B两点，与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$交于$C,D$两点，设直线$OA,OB,OC,OD$（$O$为坐标原点）的斜率分别为$k_1,k_2,k_3,k_4$，若$OA\perp OB$.

（1）证明：直线l过定点，并求出该定点的坐标；

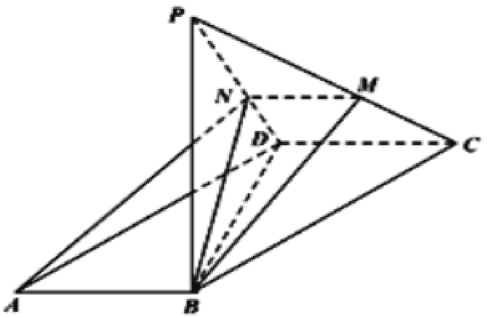
（2）是否存在常数λ，满足$k_1+k_2=\lambda\left(k_3+k_4\right)$？并说明理由.

18．（12 分）已知$f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$（$A>0,0<\omega<4,|\phi|<\frac{\pi}{2}$））过点$(0,\frac{1}{2})$，且当$x=\frac{\pi}{6}$时，函数$f(x)$取得最大值 1.

（1）将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到函数$g(x)$，求函数$g(x)$的表达式；

（2）在（1）的条件下，函数$h(x)=f(x)+g(x)+2\cos^2x-1$，求$h(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的值域.

19．（12 分）如图，在平行四边形$ABCD$中，$AD=2AB$，$\angle A=60^\circ$，现沿对角线BD将ΔABD折起，使点 **A** 到达点 **P**，点 **M**，**N** 分别在直线PC，PD上，且 **A**，**B**，**M**，**N** 四点共面.



（1）求证：$MN\perp BD$；

（2）若平面$PBD\perp$平面BCD，二面角$M-AB-D$平面角大小为30°，求直线PC与平面BMN所成角的正弦值.

20．（12 分）已知离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$经过点$D\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(1)求椭圆M的方程；

(2)荐椭圆M的右焦点为F，过点F的直线AC与椭圆M分别交于A,B，若直线DA、DC、DB的斜率成等差数列，请问ΔDCF的面积$S_{\Delta DCF}$是否为定值？若是，求出此定值；若不是，请说明理由.

21．（12 分）某百货商店今年春节期间举行促销活动，规定消费达到一定标准的顾客可进行一次抽奖活动，随着抽奖活动的有效开展，参与抽奖活动的人数越来越多，该商店经理对春节前7天参加抽奖活动的人数进行统计，y表示第x天参加抽奖活动的人数，得到统计表格如下：

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
y	**5**	**8**	**8**	**10**	**14**	**15**	**17**

（**1**）经过进一步统计分析，发现y与x具有线性相关关系．请根据上表提供的数据，用最小二乘法求出y关于x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（**2**）该商店规定：若抽中“一等奖”，可领取 **600** 元购物券；抽中“二等奖”可领取 **300** 元购物券；抽中“谢谢惠顾”，则没有购物券．已知一次抽奖活动获得“一等奖”的概率为$\dfrac{1}{6}$，获得“二等奖”的概率为$\dfrac{1}{3}$．现有张、王两位先生参与了本次活动，且他们是否中奖相互独立，求此二人所获购物券总金额X的分布列及数学期望．

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=364$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2=140$．

22．（10 分）已知函数$f\left(x\right)=x\ln x-ax^2+1$，$a\in R$．

（**1**）若曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为$y=\dfrac{1}{2}x+b$，求$a$，$b$；

（**2**）当$x\geq1$时，$f'\left(x\right)\leq ax^2-3ax+1$，求实数$a$的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．**C**

【解析】

求导，先求出$f\left(x\right)$在$x\in\left(0,\sqrt{e}\right)$单增，在$x\in\left(\sqrt{e},+\infty\right)$单减，且$f(x)_{\max}=f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2}$知设$f(x)=t$，则方程

$[f(x)]^2-mf(x)+\dfrac{1}{8}=0$有 **4** 个不同的实数根等价于方程

$t^2-mt+\frac{1}{8}=0$在$(0,\frac{1}{2})$上有两个不同的实数根，再利用一元二次方程根的分布条件列不等式组求解可得.

【详解】

依题意，$f'(x)=\frac{\frac{e}{x}\cdot x^2-2xe\ln x}{x^4}=\frac{e(1-2\ln x)}{x^3}$，

令$f'(x)=0$，解得$\ln x=\frac{1}{2}$，$x=\sqrt{e}$，故当$x\in(0,\sqrt{e})$时，$f'(x)>0$，

当$x\in(\sqrt{e},+\infty)$，$f'(x)<0$，且$f(\sqrt{e})=\frac{e\ln\sqrt{e}}{e}=\frac{1}{2}$，

故方程$t^2-mt+\frac{1}{8}=0$在$(0,\frac{1}{2})$上有两个不同的实数根，

故$\begin{cases}\Delta>0\\(t_1-\frac{1}{2})(t_2-\frac{1}{2})>0\\0<t_1+t_2<1\\t_1t_2>0\end{cases}$，$\begin{cases}m^2-\frac{1}{2}>0\\\frac{1}{8}-\frac{m}{2}+\frac{1}{4}>0\\0<m<1\end{cases}$

解得$m\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4})$.

故选：C.

【点睛】

本题考查确定函数零点或方程根个数.其方法：

(1)构造法：构造函数$g(x)$($g'(x)$易求，$g'(x)=0$可解)，转化为确定$g(x)$的零点个数问题求解，利用导数研究该函数的单调性、极值，并确定定义区间端点值的符号(或变化趋势)等，画出$g(x)$的图象草图，数形结合求解；

(2)定理法：先用零点存在性定理判断函数在某区间上有零点，然后利用导数研究函数的单调性、极值(最值)及区间端点值符号，进而判断函数在该区间上零点的个数.

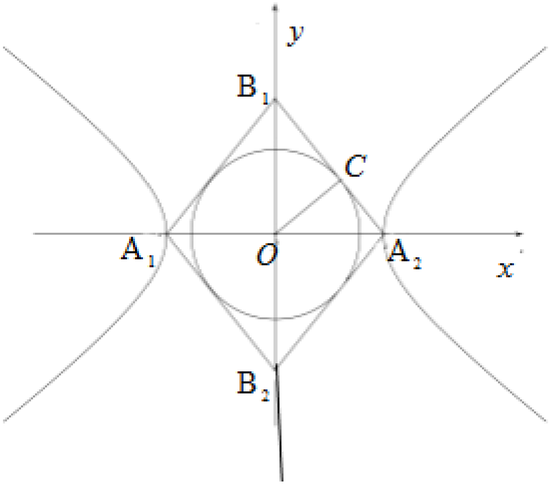
2．D

【解析】

根据题意画出几何关系，由四边形$A_1B_1A_2B_2$的内切圆面积求得半径，结合四边形$A_1B_1A_2B_2$面积关系求得c与ab等量关系，再根据基本不等式求得c的取值范围，即可确定双曲线焦距的最小值.

【详解】

根据题意，画出几何关系如下图所示：



设四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆半径为 r，双曲线半焦距为 c，

则 $|OA_2|=a, |OB_1|=b,$

所以 $|A_2B_1|=\sqrt{a^2+b^2}=c$，

四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π，

则 $18\pi=\pi r^2$，解得 $|OC|=r=3\sqrt{2}$，

则 $S_{四边形A_1B_1A_2B_2}=\frac{1}{2}\cdot|A_1A_2|\cdot|B_1B_2|=4\times\frac{1}{2}\cdot|A_2B_1|\cdot|OC|$，

即 $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=4\times\frac{1}{2}\cdot c\cdot 3\sqrt{2}$

故由基本不等式可得 $c=\frac{ab}{3\sqrt{2}}\le\frac{\frac{a^2+b^2}{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{c^2}{6\sqrt{2}}$，即 $c\ge 6\sqrt{2}$，

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

故焦距的最小值为 $12\sqrt{2}$.

故选：**D**

【点睛】

本题考查了双曲线的定义及其性质的简单应用，圆锥曲线与基本不等式综合应用，属于中档题.

3．**C**

【解析】

设球的半径为 ***R***，根据组合体的关系，圆柱的表面积为 $S=2\pi R^2+2\pi R\times 2R=54\pi$，解得球的半径 $R=3$，再代入球的体积公式求解.

【详解】

设球的半径为 ***R***，

根据题意圆柱的表面积为$S=2\pi R^2+2\pi R\times 2R=54\pi$，

解得$R=3$，

所以该球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\times\pi\times 3^3=36\pi$.

故选：**C**

【点睛】

本题主要考查组合体的表面积和体积，还考查了对数学史了解，属于基础题.

4．**D**

【解析】

根据 X 的分布列列式求出期望,方差,再利用$a+b+c=1$将方差变形为$D(X)=-4\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2+1-b$,从而可以利用二次函数的性质求出其最大值为$1-b\le\frac{1}{3}$,进而得出结论.

【详解】

由 X 的分布列可得 X 的期望为$E\left(X\right)=-a+c$，

又$a+b+c=1$，

所以 X 的方差$D\left(X\right)=\left(-1+a-c\right)^2a+\left(a-c\right)^2b+\left(1+a-c\right)^2c$

$=\left(a-c\right)^2\left(a+b+c\right)-2\left(a-c\right)^2+a+c$

$=-\left(a-c\right)^2+a+c$

$=-\left(2a-1+b\right)^2+1-b$

$=-4\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2+1-b$，

因为$a\in\left(0,1-b\right)$,所以当且仅当$a=\frac{1-b}{2}$时,$D\left(X\right)$取最大值$1-b$，

又$D\left(X\right)\le\frac{1}{3}$对所有$a\in\left(0,1-b\right)$成立,

所以$1-b\le\frac{1}{3}$,解得$b\ge\frac{2}{3}$,

故选:D.

【点睛】

本题综合考查了随机变量的期望、方差的求法,结合了概率、二次函数等相关知识,需要学生具备一定的计算能力,属于中档题.

5．A

【解析】

由题意可得$2a^2-2b^2=a^2+b^2$，即$a^2=3b^2$，代入双曲线的渐近线方程可得答案.

【详解】

依题意椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}(a>0,b>0)$即$\frac{x^2}{\frac{a^2}{2}}-\frac{y^2}{\frac{b^2}{2}}=1(a>0,b>0)$的焦点相同,可得:

$a^2-b^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$,

即$a^2=3b^2$，$\therefore\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得$\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

双曲线的渐近线方程为：$y=\pm\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$,

故选：A.

【点睛】

本题考查椭圆和双曲线的方程和性质，考查渐近线方程的求法，考查方程思想和运算能力，属于基础题.

6．C

【解析】

试题分析：设AC、BD的交点为O，连接EO，则$\angle AEO$为AE,SD所成的角或其补角；设正四棱锥的棱长为a，

则$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a,EO=\frac{1}{2}a,OA=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以$\cos\angle AEO=\frac{AE^2+OA^2-EO^2}{2AE\cdot OA}$

$$=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+(\frac{1}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}{2\times(\frac{\sqrt{3}}{2}a)\cdot(\frac{1}{2}a)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$，故 **C** 为正确答案．

考点：异面直线所成的角．

7．**A**

【解析】

用排除法，通过函数图像的性质逐个选项进行判断，找出不符合函数解析式的图像，最后剩下即为此函数的图像．

【详解】

设 $g(x)=f(x-1)=\dfrac{-2}{\ln x-x+1}$，由于 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-2}{\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}>0$，排除 ***B*** 选项；由于 $g(\mathrm{e})=\dfrac{-2}{2-\mathrm{e}},g\left(\mathrm{e}^2\right)=\dfrac{-2}{3-\mathrm{e}^2}$，所以 $g(e)>g\left(\mathrm{e}^2\right)$，排除 ***C*** 选项；由于当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)>0$，排除 ***D*** 选项.故 ***A*** 选项正确．

故选：**A**

【点睛】

本题考查了函数图像的性质，属于中档题．

8．**A**

【解析】

根据对数性质可知 $5<\log_2 35<6$，再根据集合的交集运算即可求解．

【详解】

$\because 5<\log_2 35<6$，

集合 $M=\{x\,|-2<x<6\}$，

$\therefore$由交集运算可得 $M\cap N=\{x\,|-2<x<\log_2 35\}$．

故选：**A.**

【点睛】

本题考查由对数的性质比较大小，集合交集的简单运算，属于基础题．

9．**B**

【解析】

根据规则，观察黑蚂蚁与白蚂蚁经过几段后又回到起点，得到每爬 **1** 步回到起点，周期为 **1**．计算黑蚂蚁爬完 **2020** 段后实质是到达哪个点以及计算白蚂蚁爬完 **2020** 段后实质是到达哪个点，即可计算出它们的距离．

【详解】

由题意,白蚂蚁爬行路线为 $AA_1 \to A_1D_1 \to D_1C_1 \to C_1C \to CB \to BA$，

即过 1 段后又回到起点，

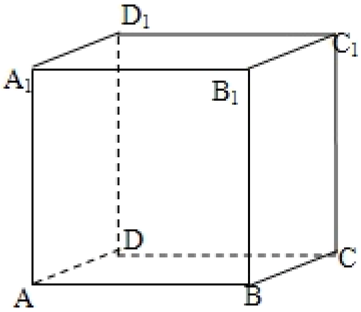
可以看作以 1 为周期，

由 $2020 \div 6 = 336\cdots 4$，

白蚂蚁爬完 2020 段后到回到 C 点；

同理,黑蚂蚁爬行路线为 $AB \to BB_1 \to B_1C_1 \to C_1D_1 \to D_1D \to DA$，

黑蚂蚁爬完 2020 段后回到 D_1 点，



所以它们此时的距离为 $\sqrt{2}$.

故选 B.

【点睛】

本题考查多面体和旋转体表面上的最短距离问题，考查空间想象与推理能力，属于中等题.

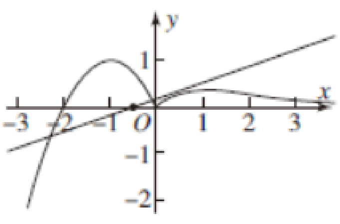
10．D

【解析】

将函数的零点个数问题转化为函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 的交点的个数问题，画出函数 $y=f(x)$ 的图象，易知直线 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 过定点 $(-\frac{1}{2},0)$，故与 $f(x)$ 在 $x<0$ 时的图象必有两个交点，故只需与 $f(x)$ 在 $x>0$ 时的图象有两个交点，再与切线问题相结合，即可求解.

【详解】

由图知 $y=f(x)$ 与 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 有 4 个公共点即可，



即 $k\in\left(0,k_{切}\right)$，当设切点 $\left(x_0,y_0\right)$，