济宁一中高三2月份定时检测数学试题

（时间：120分钟，满分150分）

一、单选题（共8题，每题5分，共40分）

1．抛物线$C: y=-4x^2$的准线方程为（　）

A．$x=\frac{1}{16}$　　B．$y=\frac{1}{16}$　　C．$x=-1$　　D．$y=\frac{1}{8}$

2．函数$f(x)=e^x-2+x$的零点所在的区间是（　　）

A．$(3,4)$　　B．$(2,3)$　　C．$(1,2)$　　D．$(0,1)$

3．若复数$\frac{1+ai}{1-i^{2023}}(a\in\mathbf{R})$为纯虚数，则$a=$（　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

4．已知圆$C_1: x^2+y^2+2x+8y-8=0$和圆$C_2:(x-5)^2+(y-4)^2=25$，则圆C_1与圆C_2的公切线有（　）

A．1条　　B．2条　　C．3条　　D．4条

5．已知函数$y=\left|3^x-1\right|$的定义域为$[a,b]$，值域为$\left[0,\frac{1}{3}\right]$，则$b-a$的最大值为（　）

A．$\log_3\frac{4}{3}$　　B．$\log_3 2$　　C．$\log_3\frac{2}{3}$　　D．2

6．三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$\triangle ABC$为等边三角形，且$AB=3$，$PA=2$，则该三棱锥外接球的表面积为（　）

A．8π　　B．16π　　C．$\frac{32\pi}{3}$　　D．12π

7．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，其中$\omega>0$，$\varphi$为实数，若$f(x)$相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，且$f(x)\le\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，则$f\left(\frac{\pi}{12}\right)$的值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$），以双曲线$C$的右顶点$A$为圆心，$b$为半径作圆$A$，圆$A$与双曲线$C$的一条渐近线交于$M$，$N$两点，若$\angle MAN=60°$，则双曲线的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．2

二、多选题（共 3 小题，每题 6 分，全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分）

9．已知 S 为圆锥的顶点，AB 为该圆锥的底面圆O的直径，$\angle SAB=45^\circ, C$为底面圆周上一点，$\angle BAC=60^\circ, SC=\sqrt{2}$，则（　）

A．该圆锥的体积为$\dfrac{\pi}{3}$

B．$AC=\sqrt{3}$

C．该圆锥的侧面展开图的圆心角大于180°

D．二面角 $A-BC-S$ 的正切值为$\sqrt{2}$

10．若$\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$展开式的二项式系数之和为 64，则下列结论正确的是（　）

A．该展开式中共有 6 项　　　　B．各项系数之和为 1

C．常数项为 60　　　　D．只有第 4 项的二项式系数最大

11．已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)$满足$f(-x-2)+f(x+2)=0$，当$x>0$时，

$f(x)=\begin{cases}5x^2-4x+1, 0<x\le 1\\ \log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{16}\right), x>1\end{cases}$，则下列说法正确的是（　）.

A．函数$f(x)$在$\left[-\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{5}\right]$上单调递减

B．若函数 $f(x)$ 在 $(0,p)$ 内 $f(x)<1$ 恒成立，则 $p\in\left(0,\dfrac{4}{5}\right]$

C．对任意实数k，方程$f(x)-kx=0$至多有 6 个解

D．方程$f(x)=m(m>0)$有 4 个解，分别为x_1，x_2，x_3，x_4，则$x_1+x_2+x_3+x_4>-\dfrac{67}{10}$

三、填空题（共 3 题，每题 5 分，共 15 分）

12．已知$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$__.

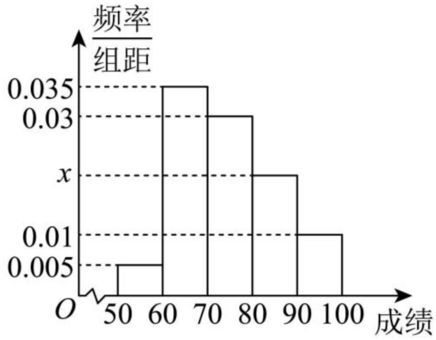
13．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1=9, a_5=1$，则使得$S_n>0$成立的最大的自然数 n 为________.

14．已知对任意$x\in\mathbf{R}$，均有不等式$ax^2+bx+c\ge 0$成立，其中$b<0$.若存在$t\in\mathrm{R}$使得$(1-t)a+(1+2t)b+3c=0$成立，则t的最小值为____________.

四、解答题（共 5 题，共 77 分）

15. （13 分）

从某校高二年级随机抽取 100 名学生的期中考试的数学成绩进行研究，发现他们的成绩都在$[50,100]$分之间，将成绩分为五组$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100)$，画出频率分布直方图，如图所示：



(1)若该校高二年级有 750 名学生，估计该年级学生的数学成绩不低于 80 分的学生有多少名？并估计高二段学生的数学成绩的中位数；

(2)用分层抽样的方法在区间$[70,100]$中抽取一个容量为 6 的样本，将该样本看作一个总体，从中抽取 2 名学生的数学成绩，求这两名学生中至少有一人的数学成绩在区间$[70,80)$的概率.

16. （15 分）

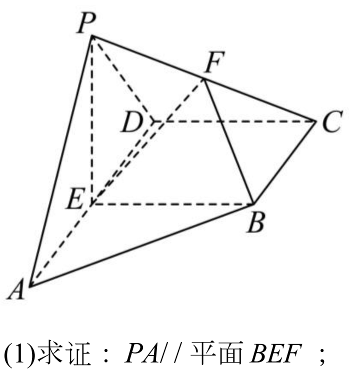
已知函数$f(x)=\ln x+\dfrac{m}{x}$.

（I）若$m=1$，求函数$f(x)$的单调区间；

（II）若$f(x)\geq m+1-x$在$[1,+\infty)$上恒成立，求实数m的取值范围.

17. （15 分）

在四棱锥$P-ABCD$中，E为棱AD的中点，$PE\perp$平面$ABCD$，$AD//BC$，$\angle ADC=90^{\circ}$，$ED=BC=2$，$EB=3$，F为棱PC的中点.

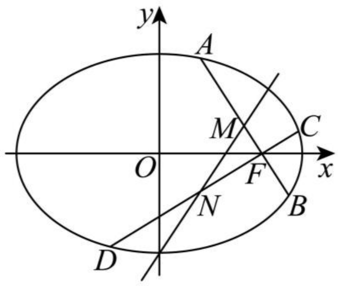


(1)求证：$PA//$平面BEF；

(2)若二面角$F-BE-C$为60°，求直线PB与平面$ABCD$所成角的正切值.

18. （17 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 $F(1,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，过 F 作两条互相垂直的弦 AB,CD，设 AB,CD 的中点分别为 M,N



(1)求椭圆的方程；

(2)证明：直线 MN 必过定点，并求出此定点坐标；

(3)若弦 AB,CD 的斜率均存在，求△FMN 面积的最大值.

19. （17 分）

将所有平面向量组成的集合记作 R^2，f 是从 R^2 到 R^2 的映射，记作 $y=f(x)$ 或 $(y_1,y_2)=f(x_1,x_2)$，其中 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$ x_1，x_2，y_1，y_2，都是实数.定义映射 f 的模为：在 $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=1$ 的条件下 $|y|$ 的最大值，记作 $\|f\|$. 若存在非零向量 $x\in R^2$，及实数 λ 使得 $f(x)=\lambda x$，则称 λ 为 f 的一个特征值.

(1)若 $f(x_1,x_2)=(\frac{1}{3}x_1,x_2)$，求 $\|f\|$；

(2)如果 $f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,x_1-x_2)$，计算 f 的特征值，并求相应的 x；

(3)若 $f(x_1,x_2)=(a_1x_1+a_2x_2,b_1x_1+b_2x_2)$，要使 f 有唯一的特征值，实数 a_1，a_2，b_1，b_2 应满足什么条件？试找出一个映射 f，满足以下两个条件：①有唯一的特征值 λ；②$\|f\|=|\lambda|$，并验证 f 满足这两个条件.

高三数学参考答案：

1．B

【分析】把抛物线方程化为标准形式，结合准线方程的特点进行求解即可.

【详解】抛物线 C 的标准方程为 $x^2=-\frac{1}{4}y$，所以其准线方程为 $y=\frac{1}{16}$，

故选：B

2．D

【分析】根据零点存在性定理判断即可.

【详解】因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-2+x$，且函数连续不间断，

所以 $f(0)=\mathrm{e}^0-2+0<0$，$f(1)=\mathrm{e}^1-2+1>0$，$f(2)=\mathrm{e}^2-2+2>0$，

$f(3)=\mathrm{e}^3-2+3>0$，$f(4)=\mathrm{e}^4-2+4>0$，

所以 $f(0)f(1)<0$，$f(1)f(2)>0$，$f(2)f(3)>0$，$f(3)f(4)>0$，

由零点存在性定理得函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-2+x$ 的零点所在的区间为 $(0,1)$，

故选：D.

3．A

【分析】利用复数的除法运算法则以及纯虚数的定义求解.

【详解】因为 $\frac{1+a\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^{2023}}=\frac{1+a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1+a\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{(a+1)+(a-1)\mathrm{i}}{2}$ 为纯虚数，

所以 $\begin{cases}a+1=0,\\a-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$，

故选：A.

4．C

【分析】分析两圆的圆心和半径，求出圆心距，由圆与圆的位置关系分析可得答案.

【详解】根据题意，圆 $C_1:x^2+y^2+2x+8y-8=0$，即 $(x+1)^2+(y+4)^2=25$，

其圆心 $C_1(-1,-4)$，半径 $R=5$，

圆 $C_2:(x-5)^2+(y-4)^2=25$，其圆心 $C_2(5,4)$，半径 $r=5$，

两圆的圆心距 $|C_1C_2|=\sqrt{(5+1)^2+(4+4)^2}=10=r+R$，

因此两圆外切；

则圆 C_1 与圆 C_2 的公切线有 3 条.

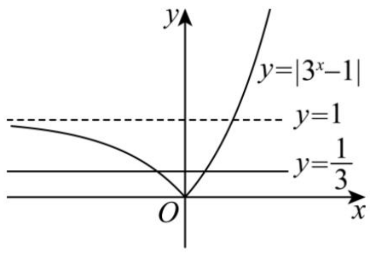
故选：C.

5．B

【分析】根据题意画出函数图象，结合指数函数图象相关性质和对数的运算法则进行计算即可.

【详解】由题意得， $y=\left|3^x-1\right|=\begin{cases}3^x-1, x\geq 0\\ -3^x+1, x<0\end{cases}$，

作出函数图象如图所示，



令 $\left|3^x-1\right|=\frac{1}{3}$，解得 $x=\log_3\frac{4}{3}$ 或 $x=\log_3\frac{2}{3}$，

则当 $b=\log_3\frac{4}{3}$， $a=\log_3\frac{2}{3}$ 时， $b-a$ 取得最大值，

此时 $b-a=\log_3\frac{4}{3}-\log_3\frac{2}{3}=\log_3 2$.

故选：B

6．B

【分析】首先作图构造外接球的球心，再根据几何关系求外接球的半径，最后代入三棱锥外接球的表面积公式.

【详解】如图，点 H 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，过点 H 作平面 ABC 的垂线，

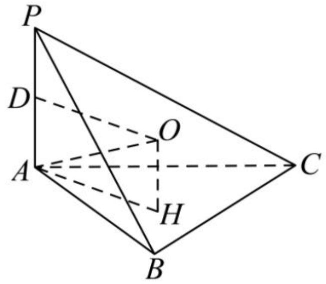
点 D 为 PA 的中点，过点 D 作线段 PA 的垂线，所作两条垂线交于点 O，

则点 O 为三棱锥外接球的球心，

因为 $PA\perp$ 平面 ABC，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $PA=2, AB=3$，

所以四边形 $AHOD$ 为矩形， $AH=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\sqrt{3}$， $OH=\frac{1}{2}PA=1$，

所以 $OA=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$，即三棱锥外接球的半径 $R=2$，



则该三棱锥外接球的表面积为 $4\pi R^2=16\pi$.

故选：B

7．D

【分析】先根据条件得到周期和对称轴，结合 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$ 可得函数 $f(x)$ 的解析式，代入 $\frac{\pi}{12}$ 可求 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

【详解】由 $f(x)$ 相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ 得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}$，

解得 $\omega=2$，

由 $f(x)\le\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立可得 $x=\frac{\pi}{6}$ 为对称轴，，

所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{6}+\varphi\right)=\pm1$，

所以 $\frac{2\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+k\pi\right)$，$k\in Z$，

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$

所以 $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}+k\pi\right)>\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}+k\pi\right)$，$k\in Z$

当 k 为偶数时，$-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)>\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$，该式不成立，

当 k 为奇数时，$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)>-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$，该式成立，

所以 $f(x)=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：D.

8．C

【分析】由题意得点 A 到渐近线距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$，结合点到直线的距离公式、平方关系以及离心率公式即可得解.

【详解】由于 $\angle MAN=60^\circ$，因此点 A 到渐近线距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$，其中一条渐近线方程为 $bx-ay=0$，

所以有 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，可得 $a^2=3b^2, e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

9．AC

【分析】求得该圆锥的体积判断选项 A，求得 AC 的长度判断选项 B，求得该圆锥的侧面展开图的圆心角判断选项 C，求得二面角 $A-BC-S$ 的正切值判断选项 D.

【详解】如图，因为 $\angle SAB=45^\circ$，所以 $\triangle SAB$ 为等腰直角三角形，

又 $SC=\sqrt{2}$，则 $SA=SB=\sqrt{2}$，所以 $AB=\sqrt{SA^2+SB^2}=2$，

则 $r=AO=SO=1$，

所以该圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot SO=\frac{\pi}{3}$，A 正确；

易知 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle ACB=90^\circ$，又 $\angle BAC=60^\circ$，

则 $\angle ABC=30^\circ$，所以 $AC=\frac{1}{2}AB=1$，B错误；

该圆锥的侧面展开图为一扇形，其弧长为 $l=2\pi$，

扇形半径为 $R=SA=\sqrt{2}$，设扇形圆心角为 α，

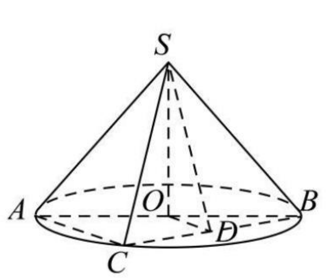
所以 $\alpha=\frac{l}{R}=\sqrt{2}\pi>\pi$，所以该圆锥的侧面展开图的圆心角大于 180°，C 正确；

取 BC 的中点 D，连接 SD, OD，则 $SD\perp BC, OD$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

所以 $OD\perp BC, OD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$，

所以 $\angle ODS$ 为二面角 $A-BC-S$ 的平面角，

易知 $\triangle SOD$ 为直角三角形，所以 $\tan\angle ODS=\frac{SO}{OD}=2$，D错误.



故选：AC.

10．BCD

【分析】对A：由二项式系数之和为2^n可得n的值，即可得展开式中的项数；对B：令$x=1$即可得各项系数之和；对C：代入二项式通项公式计算即可得；对D：当n为偶数时，二项式系数最大项为第$\frac{n}{2}+1$项即可得.

【详解】因为二项式系数之和为64，即有$2^n=64$，所以$n=6$，

则该展开式中共有7项，A错误；

令$x=1$，得该展开式的各项系数之和为1，B正确；

通项$T_{r+1}=C_6^r\cdot(2x)^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r\cdot C_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot x^{6-\frac{3}{2}r}$，

令$6-\frac{3}{2}r=0$，得$r=4$，$T_5=(-1)^4\times C_6^4\times 2^2=60$，C正确

二项式系数最大的是C_6^3，它是第4项的二项式系数，D正确.

故选：BD.

11．BD

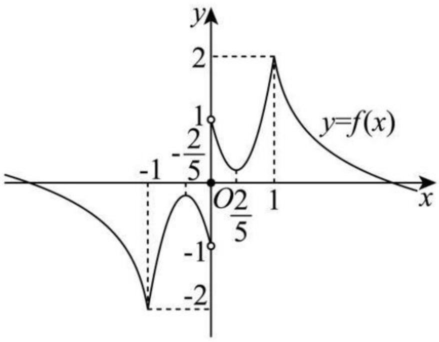
【分析】由条件可得$f(x)$为奇函数，由$f(0), f\left(\frac{2}{5}\right)$的值的大小可判断A；作出函数$f(x)$的图象，数形结合可判断B；取$k=\frac{3}{2}$时，结合图形，求解判断直线$y=\frac{3}{2}x$与函数$f(x)$的图象交点的个数可判断C；选项D，不妨设$x_1<x_2<x_3<x_4$，根据图象可得$x_1,x_2,x_3,x_4$及$m$的范围，由二次函数的对称性可知$x_2+x_3=\frac{4}{5}$，求出$x<-1$时$f(x)$的解析式，进而得$x_1,x_4$的关系式，结合函数的单调性求出$x_1+x_4$的范围，即可判断D.

【详解】定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)$满足$f(-x-2)+f(x+2)=0$，

即$f(-(x+2))=-f(x+2)$，所以函数$f(x)$为奇函数，$f(0)=0$，

选项A，$f(0)=0, f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$，得$f(0)<f\left(\frac{2}{5}\right)$，故A错误；

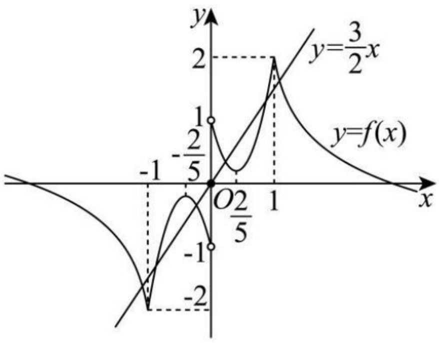
作出函数$f(x)$的图象，如图所示，



选项B，若函数 $f(x)$ 在 $(0,p)$ 内 $f(x)<1$ 恒成立，由图可知，$0<p<1$，

由 $5x^2-4x+1=1$ 解得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{5}$，所以 $0<p\le\frac{4}{5}$，故B正确；

选项C，取 $k=\frac{3}{2}$ 时，如图所示，



当 $x\in(0,1)$ 时，联立方程组 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x \\ y=5x^2-4x+1 \end{cases}$，化简得 $10x^2-11x+2=0$，

设函数 $h(x)=10x^2-11x+2$，

因为 $\begin{cases} \Delta=(-11)^2-4\times10\times2=41>0 \\ h(0)=2>0 \\ h(1)=1>0 \end{cases}$，且对称轴为 $x=\frac{11}{20}\in(0,1)$，

所以方程 $10x^2-11x+2=0$ 在 $(0,1)$ 上有两个不相等的实数根，

所以直线 $y=\frac{3}{2}x$ 与函数 $f(x)$ 图象在 $x\in(0,1)$ 有2个交点，

设 $m(x)=\frac{3}{2}x-\log_{\frac{1}{4}}(\frac{x}{2}-\frac{7}{16})$，$x\in(1,+\infty)$，则函数 $m(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\because m(1)=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}<0$，$m(2)=3-\log_{\frac{1}{4}}\frac{9}{16}=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{64}-\log_{\frac{1}{4}}\frac{36}{64}>0$，

$\therefore$ 函数 $m(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上只有一个零点，

所以直线 $y=\frac{3}{2}x$ 与函数 $f(x)$ 图象在 $x\in(1,+\infty)$ 有1个交点，