2025 届高三·十二月·六校联考

数学科试题

（满分 150 分.考试时间 120 分钟.）

注意事项：1.答题前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.并用 2B 铅笔将对应的信息点涂黑，不按要求填涂的，答卷无效.

2.选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上； 如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，只需将答题卡交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\left\{x\in\mathrm{R}\left|x^2-x-2<0\right.\right\}$，$B=\left\{y\left|y=2^x,x\in A\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$(-1,4)$　　B．$(0,2)$　　C．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D．$\left(\frac{1}{2},2\right)$

2．命题：“$\exists x>0,x^2+x>0$”的否定是（　）

A．$\forall x>0,x^2+x>0$

B．$\forall x>0,x^2+x\le 0$

C．$\exists x\le 0,x^2+x>0$

D．$\exists x\le 0,x^2+x\le 0$

3．已知等边$\triangle ABC$的边长为 1，点D,E分别为AB,BC的中点，若$\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{EF}$，则$\overrightarrow{AF}=$（　）

A．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$

B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

D．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

4．将函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则在下列区间中，函数$g(x)$单调递减的是（　）

A．$\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$

B．$\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right)$

C．$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right)$

D．$\left(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right)$

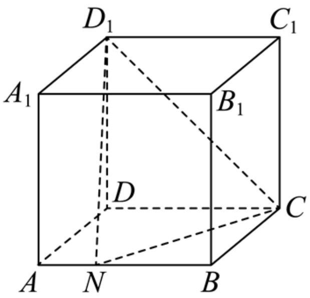
5．已知$x>0, y>0$，且$\frac{1}{x}+2y=1$，则$2x+\frac{1}{y}$的最小值为（　）

A．4　　B．$4\sqrt{2}-1$　　C．6　　D．8

6．将曲线$y=e^{2x}$（为自然对数的底数）　绕坐标原点顺时针旋转θ后第一次与轴相切，则$\tan\theta=$（　）

A．　　B．e^2　　C．$2e$　　D．$2e^2$

7．如图，在已知正方体.$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，N是棱AB上的点，且$AN=\frac{1}{3}AB$.平面NCD_1将此正方体分为两部分，则体积较小部分与体积较大部分的体积之比为（　）



A．$\frac{13}{41}$　　B．$\frac{13}{54}$

C．$\frac{35}{127}$　　D．$\frac{35}{162}$

8．已知函数$f(x)=\cos 3x-\cos 2x, x\in(0,\pi)$，若$f(x)$有两个零点$x_1, x_2\ (x_1<x_2)$，则$\cos x_1\cos x_2$的值为（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$-\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得全部分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9．在复平面内，复数z_1, z_2对应的向量分别为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$，则下列说法不正确的是（　）

A．$|z_1\cdot z_2|=|\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|$

B．$|z_1-z_2|=|\vec{a}_1-\vec{a}_2|$

C．若$|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$，则$z_1\cdot z_2=0$

D．若$|z_1|=|z_2|$，则$z_1^2=z_2^2$

10．已知等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，前项和为S_n，若$S_{25}<S_{23}<S_{24}$，则下列说法正确的是（　）

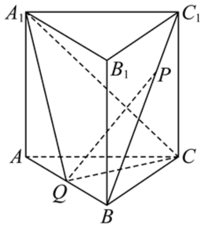
A．当$n=24$，S_n最大

B．使得$S_n<0$成立的最小自然数$n=48$

C．$|a_{23}+a_{24}|>|a_{25}+a_{26}|$

D．$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$中最小项为$\dfrac{S_{25}}{a_{25}}$

11．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=BC=CC_1=2$，$AC\perp BC$，Q 是线段AB的中点，P 是线段 BC_1 上的动点 （含端点），则下列命题正确的是 （　）



A．三棱锥 $P-A_1QC$ 的体积为定值

B．直线PQ与 AC 所成角的正切值的最小值是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C．在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$内部能够放入一个表面积为1.44π的球

D．A_1P+PQ 的最小值为 $\sqrt{10+2\sqrt{6}}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．已知向量$\vec{a}=(m,1),\vec{b}=(m,-1)$，若$2\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$垂直，则$|\vec{a}|$等于______.

13．已知数列$\{a_n\}$的前项和为$S_n=2a_n-2\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，$b_n=\dfrac{a_n}{(a_n-1)(S_n+1)}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则数列$\{b_n\}$的前项和 $T_n=$__________.

14．若存在$a,b,c\in[\pi,2\pi]$（a,b,c 互不相等)，满足$|\sin\omega a|+|\sin\omega b|+|\sin\omega c|=3\,(\omega>0)$，则的取值范围为_________.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 对应的三边分别是a,b,c，且 $\dfrac{\sqrt{2}a-b}{c}=\sqrt{2}\cos B$.

(1)求角C的值;

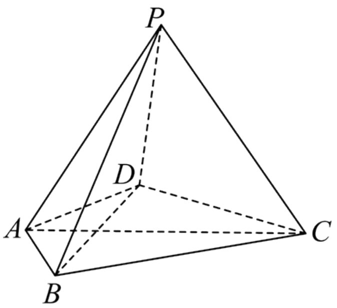
(2)若$c=5,2\tan A=3\tan B$，求$\triangle ABC$的面积.

16．已知椭圆C的中心在坐标原点，两个焦点分别为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，点 $A\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$在椭圆$C$上.

(1)求椭圆C的标准方程和离心率；

(2)已知直线l与椭圆C交于M、N两点，且$OM\perp ON$，求$\triangle OMN$面积的取值范围.

17．如图所示，已知四棱锥$P-ABCD$中，$BC=CD=PA=PB=PC=PD=2$，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$.



(1)求证：$BD\perp$平面PAC；

(2)当四棱锥$P-ABCD$的体积最大时，求二面角$P-BC-A$的正弦值.

18．已知函数$f\left(x\right)=\ln x+\dfrac{2}{x}-a\left(x+1\right)\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

(1)若$a=-1$，求函数$y=f(x)$的极值；

(2)讨论$f(x)$的单调性；

(3)若$x_1,x_2(x_1<x_2)$是$f(x)$的两个极值点，证明：$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)<\sqrt{\dfrac{1}{2a}-4}$.

19．给定正整数$n\geq2$，设数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列，对$i\in\{1,2,\cdots,n\},x_i$表示以a_i为首项的递增子列的最大长度（数列中项的个数叫做数列的长度），y_i表示以a_i为首项的递减子列的最大长度. 我们规定：当a_i后面的项没有比a_i大时，$x_i=0$，当a_i后面的项没有比a_i小时，$y_i=0$，例如数列：$n=3,a_1=2,a_2=1,a_3=3$，则$x_1=2,y_1=2,x_2=2,y_2=0,x_3=0,y_3=0$.

(1)若$n=4,a_1=1,a_2=4,a_3=2,a_4=3$，求$x_1,y_2$和$\sum_{i=1}^{4}\left|x_i-y_i\right|$；

(2)求证：$\forall i\in\left\{1,2,\cdots,n-1\right\},\left(x_i-y_i\right)^2+\left(x_{i+1}-y_{i+1}\right)^2\neq0$；

(3)求$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|$的最值.

答案

1．D

解析：$A=\left\{x\in \mathrm{R}\left|x^{2}-x-2<0\right.\right\}=\left(-1,2\right)$，

$B=\left\{y\left|y=2^{x},x\in A\right.\right\}=\left(\dfrac{1}{2},4\right)$，

所以$A\cap B=\left(\dfrac{1}{2},2\right)$.

故选：D.

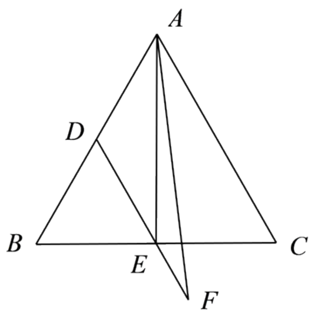
2．B

解析：因为命题：“$\exists x>0,x^{2}+x>0$”的否定是：“$\forall x>0,x^{2}+x\le 0$”.

故选：B

3．B

解析：在$\triangle ABC$中，取$\left\{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right\}$为基底，



则$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=2,\left\langle \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right\rangle =60^{\circ}$，

因为点D,E分别为AB,BC的中点，$\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{EF}$，

所以$\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

故选：B.

4．C

解析：由题意$g\left(x\right)=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

对于 A，由$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{8}\right)$，得$4x-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$，

所以函数$g(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{8}\right)$上单调递增，故 A 不符；

对于 B，由 $x\in\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right)$，得 $4x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$ 上不单调，故 B 不符；

对于 C，由 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right)$，得 $4x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right)$ 上单调递减，故 C 符合；

对于 D，由 $x\in\left(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right)$，得 $4x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{4\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right)$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right)$ 上不单调，故 D 不符.

故选：C.

5．D

解析：因为 $x>0,y>0$，且 $\frac{1}{x}+2y=1$，

所以 $2x+\frac{1}{y}=\left(2x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+2y\right)=4+\frac{1}{xy}+4xy\geq 4+2\sqrt{\frac{1}{xy}\cdot 4xy}=8$，

当且仅当 $\begin{cases}\frac{1}{xy}=4xy\\ \frac{1}{x}+2y=1\end{cases}$，即 $\frac{1}{x}=2y=\frac{1}{2}$ 时，取等号，

所以 $2x+\frac{1}{y}$ 的最小值为 8.

故选：D.

6．C

解析：设直线 $y=kx$ 与曲线 $y=e^{2x}$ 相切，设切点为 (x_0,y_0)，

$y'=2e^{2x}$，

则有 $k=2e^{2x_0}$，

$e^{2x_0}=y_0=kx_0=2e^{2x_0}\cdot x_0$，解得 $x_0=\frac{1}{2}$，所以 $k=2e$，

所以切点为 $\left(\frac{1}{2},e\right)$，

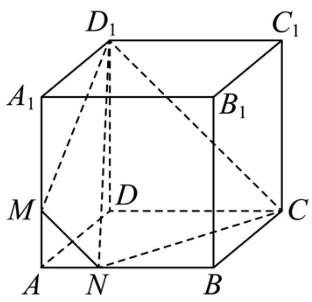
将曲线 $y=e^{2x}$（为自然对数的底数） 绕坐标原点顺时针旋转 θ 后第一次与轴相切，

则 $\tan\theta=\frac{y_0}{x_0}=2e$.

故选：C.

7．A

解析：如图：取棱 AA_1 上的点 M，使得 $AM=\frac{1}{3}AA_1$，连接 MN， MD_1.不妨设正方体棱长为 3.



则 $MN//CD_1$，所以点 M,N,C,D_1 共面，平面 $MNCD_1$ 就是平面 NCD_1.

平面 $MNCD_1$ 把正方体分成两部分，其中几何体 $ANM-DD_1C$ 为棱台，

其体积为：$V_1=\frac{1}{3}\times 3\times\left(S_{\triangle AMN}+S_{\triangle DD_1C}+\sqrt{S_{\triangle AMN}\cdot S_{\triangle DD_1C}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$.

又正方体的体积为：$V=3\times 3\times 3=27$.

所以较大部分的体积为：$V_2=V-V_1=27-\frac{13}{2}=\frac{41}{2}$.

所以：$\frac{V_1}{V_2}=\frac{13}{41}$.

故选：A

8．B

解析：$f\left(x\right)=\cos 3x-\cos 2x=\cos\left(\frac{5x}{2}+\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{x}{2}\right)=-2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}$，

令 $f\left(x\right)=0$，则 $\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}=0$，

所以 $\sin\frac{5x}{2}=0$ 或 $\sin\frac{x}{2}=0$，

所以 $\frac{5x}{2}=k\pi$ 或 $\frac{x}{2}=k\pi,k\in\mathrm{Z}$，

所以 $x=\frac{2k\pi}{5}$ 或 $x=2k\pi,k\in\mathrm{Z}$，

又因为 $x\in\left(0,\pi\right)$，所以 $x_1=\frac{2\pi}{5},x_2=\frac{4\pi}{5}$，

所以 $\cos x_1\cos x_2=\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}$

$=\frac{\sin\frac{8\pi}{5}}{4\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{-\sin\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{2\pi}{5}}=-\frac{1}{4}$.

故选：B.

9．ACD

解析：设 $z_1=a+b\mathrm{i},z_2=c+d\mathrm{i}\left(a,b,c,d\in\mathrm{R}\right)$，则 $\overrightarrow{a_1}=\left(a,b\right),\overrightarrow{a_2}=\left(c,d\right)$，

对于 A，当 $z_1=1+\mathrm{i},z_2=1-\mathrm{i}$ 时，$\overrightarrow{a_1}=\left(1,1\right),\overrightarrow{a_2}=\left(1,-1\right)$，

则 $\left|z_1\cdot z_2\right|=2,\left|\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}\right|=0$，故 A 错误；

对于 B，$\left|z_1-z_2\right|=\left|a-c+\left(b-d\right)\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(a-c\right)^2+\left(b-d\right)^2}$，

$\left|\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}\right|=\left|\left(a-c,b-d\right)\right|=\sqrt{\left(a-c\right)^2+\left(b-d\right)^2}$，

所以 $\left|z_1-z_2\right|=\left|\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}\right|$，故 B 正确；

对于 C，当 $z_1=1,z_2=\mathrm{i}$ 时，$\left|z_1-z_2\right|=\left|1-\mathrm{i}\right|=\sqrt{2}$，$\left|z_1+z_2\right|=\left|1+\mathrm{i}\right|=\sqrt{2}$，

满足 $\left|z_1-z_2\right|=\left|z_1+z_2\right|$，但 $z_1\cdot z_2=\mathrm{i}\neq0$，故 C 错误；

对于 D，当 $z_1=1+\mathrm{i},z_2=1-\mathrm{i}$ 时，$\left|z_1\right|=\left|z_2\right|$，

而 $z_1^2=2\mathrm{i},z_2^2=-2\mathrm{i}$，故 D 错误.

故选：ACD.

10．ABD

解析：因为 $S_{25}<S_{23}$，所以 $a_{24}+a_{25}<0$，$S_{23}<S_{24}$，所以 $a_{24}>0$，所以 $a_{25}<0$，

所以 $d=a_{25}-a_{24}<0$.

所以，当 $n=24$ 时，S_n 最大.故 A 正确；

由 $S_{47}=\dfrac{47\left(a_1+a_{47}\right)}{2}=\dfrac{47\times2a_{24}}{2}=47a_{24}>0$，$S_{48}=\dfrac{46\left(a_1+a_{48}\right)}{2}=\dfrac{47\left(a_{24}+a_{25}\right)}{2}<0$，

所以使得 $S_n<0$ 成立的最小自然数 $n=48$，故 B 正确；

由 $a_{23}>a_{24}>0>a_{25}>a_{26}$，且 $a_{23}+a_{24}+a_{25}+a_{26}=2\left(a_{24}+a_{25}\right)<0$，

所以 $a_{23}+a_{24}<-a_{25}-a_{26}=\left|a_{25}+a_{26}\right|$，即 $\left|a_{23}+a_{24}\right|<\left|a_{25}+a_{26}\right|$，故 C 错误；

因为当 $n\leq24$ 时，$a_n>0$，$S_n>0$，所以 $\dfrac{S_n}{a_n}>0$；

当 $n\geq48$ 时，$a_n<0$，$S_n<0$，所以 $\dfrac{S_n}{a_n}>0$；

当 $25\leq n\leq47$ 时，$a_n<0$，$S_n>0$，所以 $\dfrac{S_n}{a_n}<0$.

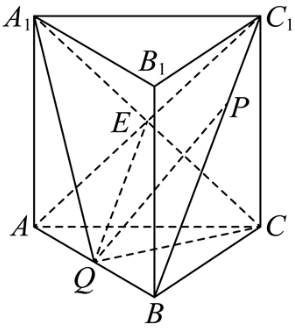
且 $0>a_{25}>a_{26}>\cdots>a_{47}$，$S_{25}>S_{26}>\cdots>S_{47}>0$，

所以 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 中最小项为 $\dfrac{S_{25}}{a_{25}}$，故 D 正确.

故选：ABD

11．ABD

解析：对于 A 选项，如下图所示，连接 AC_1 交 A_1C 于点 E，连接 EQ，



因为四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，则 E 为 AC_1 的中点，

又因为 Q 为 AB 的中点，则 $EQ//BC_1$，

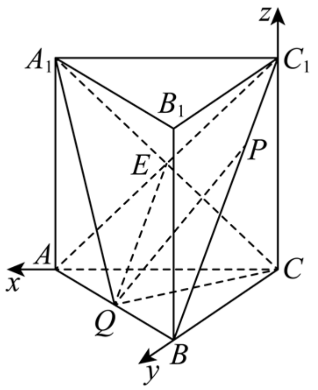
因为 $EQ\subset$ 平面 A_1CQ，$BC_1\not\subset$ 平面 AC_1Q，则 $BC_1//$ 平面 AC_1Q，

因为 $P\in BC_1$，则点到平面 A_1CQ 的距离等于点到平面 A_1CQ 的距离，为定值，

又因为 $\triangle A_1CQ$ 的面积为定值，故三棱锥 $P-A_1QC$ 的体积为定值，故 A 正确；

对于 B 选项，因为 $CC_1\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，

以点 C 为坐标原点，CA、CB、CC_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



由 $AC=BC=CC_1=2$，则 $A(2,0,0)$、$C(0,0,0)$、$Q(1,1,0)$、$B(0,2,0)$、$C_1(0,0,2)$，

设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC_1}=\lambda(0,-2,2)=(0,-2\lambda,2\lambda)$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，

则 $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BP}=(-1,1,0)+(0,-2\lambda,2\lambda)=(-1,1-2\lambda,2\lambda)$，

设直线 PQ 与 AC 所成角为 θ，

所以，$\left|\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{QP}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QP}\right|}=\dfrac{2}{2\sqrt{1+(1-2\lambda)^2+4\lambda^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{8\lambda^2-4\lambda+2}}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/588107027036007006