第二章　速度相关及湍流能谱

§2-1　湍流脉动速度分量的相关

一、单点湍流脉动速度分量的二阶相关

即为雷诺应力$-\rho\overline{u_i u_j}$

考虑垂直于x_1方向的面积微元ds，设不均流速$\bar{U}_1=0$，则通过面积微元ds的平均动量流为$\rho u_1 u_1 ds$，对其取平均则得平均的湍流动量流，这一动量流会在面积微元ds上产生反作用力，因此，在正湍流应力前加负号，即$-\rho\overline{u_i u_i}$表示为力学上的湍流正应力。

取面积元ds垂直于x_2方向，通过这一面积元的流体有u_1、u_2两个速度。如果平均说来，大多数具有正u_2值的质点也具有正u_1值,因此平均说来$\overline{u_1 u_2}$为正值。对于这种情况正x_1方向的力作用于平面ds的正x_2一侧流体上，负x_1方向的力将作用于平面ds的负x_2一侧流体上，随之有$-\rho\overline{u_1 u_2}$，得出$i\neq j,-\rho\overline{u_i u_j}$的雷诺剪切应力。

二、双点（两点）湍流速度分量的二阶相关

1、双点相关系数

两点相关可以用来研究场内的湍流涡的空间结构，可以界定流场内这样一类区域，在这类区域中，流体运动具有某种意义上的关联。在稳定均匀各向同性流场内，设流场内有A、B两点均位于x_2轴上，A点坐标为ξ_2，B点坐标为ξ_2+r。

则 A、B 两点横向速度相关和纵向速度相关系数定义为

$$g(r)=\frac{\overline{u_1(\xi_2)u_1(\xi_2+r)}}{\sqrt{\overline{u_1^2(\xi_2)}}\cdot\sqrt{\overline{u_1^2(\xi_2+r)}}}=\frac{\overline{u_1(\xi_2)u_1(\xi_2+r)}}{\overline{u_1^2}}$$

$$f(r)=\frac{\overline{u_2(\xi_2)u_2(\xi_2+r)}}{\sqrt{\overline{u_2^2(\xi_2)}}\cdot\sqrt{\overline{u_2^2(\xi_2+r)}}}=\frac{\overline{u_2(\xi_2)u_2(\xi_2+r)}}{\overline{u_2^2}}$$

由于下面所讨论的相关性质适于任何二阶相关系数，因此，在此仅讨论横向相关系数 *g(r)*，并且湍流平均取为时间平均值。

现在假设湍流为均匀湍流，即整个流场内，湍流的平均统计性质均匀，*g(r)*也可以表示为对 ξ_2取平均，即空间平均，则

$$\overline{u_1(\xi_2)u_1(\xi_2+r)}=\frac{1}{\xi_2''-\xi_2'}\int_{\xi_2'}^{\xi_2''}u_1(\xi_2)u_1(\xi_2+r)d\xi_2$$

对于 *g(r)*和 *f(r)*可以归纳出以下几点性质：（均匀湍流场下）

由于假设流场为均匀的，则

$$\sqrt{\overline{u_1^2(\xi_2)}}=\sqrt{\overline{u_1^2(\xi_2+r)}}=\sqrt{\overline{u_1}}$$

（1）*g(0)= f(0)*=1

证明：$\overline{u_1^2}[g(0)]=\lim_{r\to 0}\overline{u_1(\xi_2)u_1(\xi_2+r)}=\overline{u_1^2(\xi_2)}=\overline{u_1^2}$

∴ *g(0)*=1

（2）$|g(r)|\le 1$，$|f(r)|\le 1$

证明：由于$\overline{[u_1(\xi_2)\pm u_1(\xi_2+r)]^2}\ge 0$，对于均匀流场有

$2\overline{u_1^2}\pm 2\overline{u_1(\xi_2+r)u_1(\xi_2)}\ge 0$

∴ $-1\le g(r)\le 1$，$|g(r)|\le 1$

（3）*g(r)= g(-r)*，对称性

证明：由于流场为均匀，因此将A、B两点坐标均减小r，由 $\xi_2\to\xi_2-r$，$\xi_2+r\to\xi_2$，相关系数应保持不变，这时相应于*g(r)*中r变为负值，即*g(r)= g(-r)*，这说明*g(r)*是r的偶函数。

（4）$f(\infty)=g(\infty)=0$，因为相隔无穷远距离两点的脉动速度完全不相关。

接下来讨论的是 *g(r)*的几何形状，可以预计，随着 r 的增加 *g(r)* 应减小，即两点之间相关程度降低。但如何降低没有确定，一般来说 *g(r)*的数学形式是难以找到的，但当 r→0 附近在均匀流场的假设下确定 *g(r)*的形状是可能的。

为此将 *g(r)*在 r =0 点处利用泰勒级数展开，并利用均匀流场的假设来确定 *g(r)*在 r =0 处的各阶微商。下面推导 *g(r)*在 r =0 点处各阶微商的表达式

从均匀性出发

$$\overline{u_1(\xi_2)u_1(\xi_2+r)}=\overline{u_1(\xi_2-r)u_1(\xi_2)} \qquad \text{取} \, r \, \text{的导数}$$

$$\therefore \overline{u_1(\xi_2)\frac{\partial u_1(\xi_2+r)}{\partial(\xi_2+r)}}=-\overline{\frac{\partial u_1(\xi_2-r)}{\partial(\xi_2-r)}u_1(\xi_2)}$$

$$\therefore \overline{u_1^2}\left[\frac{\partial g(r)}{\partial r}\right]_{r=0}=\left[\overline{u_1\frac{\partial u_1}{\partial r}}\right]_{r=0}=-\left[\overline{\frac{\partial u_1}{\partial r}u_1}\right]_{r=0}=0$$

又由于均匀性

$$\overline{u_1(\xi_2-r)\frac{\partial u_1(\xi_2)}{\partial r}}=\overline{u_1(\xi_2)\frac{\partial u_1(\xi_2+r)}{\partial(\xi_2+r)}}$$

$$\therefore -\overline{\frac{\partial u_1(\xi_2-r)\partial u_1(\xi_2)}{\partial(\xi_2-r)\partial r}}=\overline{u_1(\xi_2)\frac{\partial^2 u_1(\xi_2+r)}{\partial(\xi_2+r)\partial r}}$$

$$\therefore \overline{u_1^2}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right]_{r=0}=\left[\overline{u_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}}\right]_{r=0}=-\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial r}\right]^2_{r=0}}$$

将 $g(r)$ 在 $r=0$ 附近进行 Taylor 级数展开，

$$g(r)=1+\frac{1}{2!}r^2\left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right]_{r=0}+\frac{1}{4!}r^4\left[\frac{\partial^4 g}{\partial r^4}\right]_{r=0}+\cdots$$

$$g(r)=1-\frac{1}{2!}r^2\frac{1}{\overline{u_1^2}}\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial r}\right]}\Bigg|_{r=0}+\frac{r^4}{4!}\frac{1}{\overline{u_1^2}}\overline{\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\right]^2}\Bigg|_{r=0}+\cdots$$

当$r\to 0$忽略 4 阶以上的小项，得出$g(r)$趋于r的抛物线函数，因此定义长度尺度λ_g，对于非常小的r，则有

$$g(r)=1-\frac{r^2}{\lambda_g^2}$$

其中 $\frac{1}{\lambda_g}=-\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2})_{r=0}$ 或 $\frac{1}{\lambda_g^2}=\frac{1}{2\overline{u_1^2}}\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial r}\right]^2}\Bigg|_{r=0}$

如想象湍流场内有一定尺度的涡运动，处于同一个涡结构内的两点上的脉动速度之间有较高的相关性，而不在同一个涡结构内的两点相关甚少。于是可把λ_g理解为一种代表性涡长度尺度，由于λ_g是u_1的局部变化均方值确定的，而u_1的局部变化是由湍流流场内出现的最小涡引起的，并由于分子粘性作用使湍流的部分动能耗散为热能，因此，称为*微尺度或耗散尺度*。它反映了湍流中最小涡的度量和主要耗散涡尺度的度量，这个尺度是由 G. T. Taylor 引入，故称为 Taylor 微尺度。

同样的方法也可得到纵向相关系数$f(r)$相应性质，但λ_f一般与λ_g不相等。

$$\frac{1}{\lambda_f^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{r=0}=\frac{1}{2\overline{u_2^2}}\overline{\left[\frac{\partial u_2}{\partial r}\right]^2}\Bigg|_{r=0}$$

可推得 $\lambda_f=\sqrt{2}\lambda_g$

2．湍流的积分尺度

定义 $\Lambda_g=\int_0^\infty g(r)dr$，$\Lambda_f=\int_0^\infty g(r)dr$

其意义是说明当两点距离超过Λ_g时，两点相关系数为 1，即Λ_g表征了两点存在相关性的最大特性距离，它是湍流中最大涡尺的代表。

3．欧拉时间相关

如果说上面说明了空间上欧拉相关的定义和性质，下面讨论同一点不同时刻的相关，即欧拉时间相关系数。

考虑x_j为常数（位置不变）的脉动速度分量$u_1(x_j,t)$，若$\sqrt{\overline{u^2}}$，欧拉时间相关系数为在两个不同时刻t'与$t'+\tau$的脉动速度分量之间的关联的无因次化

$$R_E(t)=\frac{\overline{u_1(t')u_1(t'+\tau)}}{\overline{u_1^2}}$$

由于假定流场的均匀性，同前面讨论纵向相关系数一样，可以证明在$t=0$附近，欧拉时间相关系数可表示为

$$R_E(\tau)=1-\frac{\tau^2}{2\overline{u^2}}\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}\right]^2_{t=0}}+\frac{\tau^4}{4!\,\overline{u_1^2}}\overline{\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right]^2_{t=0}}+\ldots$$

在$R_E(\tau)$曲线顶点的密切抛物线方程为

$$R_E(\tau)\approx 1-\frac{\tau^2}{\tau_E^2}$$

其中 $$\frac{1}{\tau_{\mathrm{E}}^2}=\frac{1}{2\overline{u_1^2}}\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}\right]^2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 R_{\mathrm{E}}}{\partial t^2}\right]_{t=0}$$

τ_{E}为一个时间尺度，表示了脉动速度$u_1(t)$脉动最快变化的时间尺度的代表，从耗散角度来讲，它是指最小涡的生存时间，因为与 Taylor 微尺度λ_g之间的密切联系，称为**欧拉耗散涡时间尺度**。它不仅与流场内的湍流结构有关，而且与主流速度对该点的输运特性有关。

同样可以得到**积分时间尺度**

$$T_E=\int_0^{\infty}R_E(\tau)d\tau$$

它可以理解为保持$u_1(t)$湍流行为中最大时间尺度的一种度量

欧拉时间关联系数$R_E(\tau)$与欧拉空间关联系数$f(r)$和$g(r)$之间有何

联系？只有在均匀各向同性湍流的情况下可以导出它们之间的近似关系，对于一般情况，至今还不清楚它们之间的联系。

在均匀湍流场内有一常数平均速度$\overline{U_2}$，假定$\overline{U_2} >> |u_2|$，则在流场内一固定空间点上所观测到的$u_2(t)$的时间变化情况，可以近似的看成是由在沿着过此点的x_2方向的直线上分布的速度空间变化$u_2(\xi_2)$，设想被冻结起来，以平均速度$\overline{U_2}$快速移过此点形成，故$r = \overline{U_2} \cdot \tau$——**Taylor**冻结流假设。

$$f(r) = \frac{\overline{u_2(x_2)u_2(x_2+r)}}{\overline{u^2}} = \frac{\overline{u_2(t')u_2(t'+\tau)}}{\overline{u^2}} = R_E(\tau)$$

积分长度 $$\Lambda_f = \int_0^\infty f(r)dr = \overline{U_2}\int_0^\infty R_E(\tau)d\tau = \overline{U_2}T_E$$

湍流的 Taylor 微尺度λ_g与 Eular 耗散时间尺度τ_{E}之间的关系

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{r=0} = -\left(\frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2}\right)_{t=0}\frac{1}{\overline{U^2}} = \frac{1}{(\bar{U}\tau_{\mathrm{E}})^2}$$

则 $$\sqrt{2}\lambda_{\mathrm{g}} = \bar{U}\tau_{\mathrm{E}}$$

§2-2 流体质点的湍流扩散

一、湍散扩散（**Turbulent diffusion**）基本思想

由于任意两个湍流场内质点的运动是不规则的、随机的，统计地讲，它们之间的距离随时间增加而增加。这也反映出流场内涡团的扩展变化，如果我们考察许多质点，并观察各质点在以后各时刻的位置，则会发现质点在整个空间逐渐传播、扩散的特征。这就是湍流扩散的基本思想。

二、湍流质点的扩散系数

湍流质点的扩散是其宏观特性，我们并不关心单个粒子的具体轨迹，在简单条件下，各向同性湍流下对湍流质点的扩散性质进行考察，

则从原点出发的质点 t 时刻之后，质点的 Lagrangian 位置记为

$$y(t)=\int_0^t v(t')dt', \qquad \overline{V}=0$$

其平均值为零，可见从长时间统计平均来看，质点云扩散的中心是没有漂移的。

利用位移和该点脉动速度的乘积，具有扩散系数的量纲（m^2/s）反映了质点扩散的强弱程度。

$$y(t)v(t)=y(t)\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}y^2)=\int_0^t v(t)v(t')dt'$$

取平均

$$\frac{d}{dt}(\overline{\frac{1}{2}y^2})=\int_0^t \overline{v(t)v(t')}dt'$$

定义质点扩散系数 $D=\frac{\overline{y^2}}{2t}$

t—扩散时间，适用于扩散时间远远大于质点实际位移Δy_i所需时间Δt_i， $t>>\Delta t_i$

$\overline{y^2}$—运动位移均方值，$\overline{y^2}=\overline{(\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i^2)}$，或称扩散位移。

三、流体质点的湍流扩散

令$\overline{u_2(t)}$为一流体质点在x_2方向上的湍流速度，在时刻 t 以后，这一质点沿x_2方向经过的距离可写为

$$y_2(t)=y_2(0)+\int_0^t dt'u_2(t')$$

这里用y_2来表示拉格朗日坐标，以区别欧拉坐标x_2。令$y_2(0)=0$，在时空均匀流场假设条件下，现仅考虑只有在x_2方向有扩散的情况（简单情况），则可得到起始时刻t_0的质点经t时刻后的位移为

$$y_2(t+t_0)=\int_0^t dt'u_2(t_0+t')$$

可得出$y_2(t)$的均方差值或方差

$$\overline{y_2^2(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T y_2^2(t+t_0)dt_0$$（对不同起始时刻t_0的大量质点统计平均）

代入$y_2(t)$的表达式得

$$\overline{y_2^2(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T dt_0\int_0^t dt'u_2(t_0+t')\int_0^t dt''u_2(t_0+t'')$$

$$=\int_0^t dt'\int_0^t dt''\left[\frac{1}{T}\int_0^T dt_0u_2(t_0+t')u_2(t_0+t'')\right]$$

$$=\int_0^t dt'\int_0^t dt''\overline{u_2(t')u_2(t'')}$$

表明扩散位移与流体质点在两个时刻t'和t''的脉动运动相关有关，引入相关 lagrangian 相关

$$R_L(\tau)=\frac{\overline{u_2(t')u_2(t'+\tau)}}{\overline{u_2^2}}$$

同时，$$\int_0^t dt'\int_0^t dt''=2\int_0^t dt'\int_0^{t'}dt''$$

其中$u_2(t')$与$u_2(t'+\tau)$是同一流体质点在两个时刻下脉动分量。

令$t''-t'=\tau$，则

$$\overline{y_2^2(t)}=2\int_0^t dt'\int_0^{t'}dt''\overline{u_2(t')u_2(t'+\tau)}$$

$$=2\int_0^t dt'\int_{-t'}^0 d\tau\overline{u_2(t')u_2(t'+\tau)}$$

$$=2\int_0^t dt'\int_0^{t'} d\tau\overline{u_2(t')u_2(t'-\tau)}$$

$$=2\overline{u_2^2}\int_0^t dt'\int_0^{t'} d\tau R_L(\tau)$$ Taylor（1921）

利用分部积分

$$\int_0^t dt'\int_0^t d\tau\cdot R_L(\tau)$$

$$=\left[t'\int_0^{t'}d\tau\cdot R_L(\tau)\right]_0^t-\int_0^t dt't'R_L(t')$$

$$=t\int_0^t d\tau\cdot R_L(\tau)-\int_0^t d\tau\cdot\tau\cdot R_L(\tau)$$

$$\therefore \overline{y_2^2(t)} = 2\overline{u_2^2}\int_0^t d\tau(t-\tau)R_L(\tau) \qquad \text{Feniet} \quad (1939)$$

当τ很小时，$R_L(\tau)\approx 1$，Taylor 扩散表达式可简化为

$$\overline{y_2^2(t)} \doteq \overline{u_2^2}t^2 \qquad \therefore \sqrt{\overline{y_2^2(t)}} = \sqrt{\overline{u_2^2}}\cdot t$$

即扩散位移与时间成正比，称为**短时间扩散**。

当t很大时，根据 Feniet 表达式

$$\int_0^t d\tau(t-\tau)R_L(\tau) = t\int_0^t d\tau\cdot R_L(\tau) - \int_0^t d\tau\cdot\tau\cdot R_L(\tau)$$

第二项相对前一部分仅为小量。称$\int_0^t d\tau\cdot R_L(\tau)$为拉格朗日积时间尺度，$T_L = \int_0^t d\tau\cdot R_L(\tau)$，则

$$\sqrt{\overline{y_2^2(t)}} = \sqrt{2\overline{u_2^2}T_L\cdot t}$$

长时间扩散位移与进间$\sqrt{t}$成正比。

湍流扩散系数 D，有

$$D = \frac{\overline{y_2^2(t)}}{2t}$$

对长时间扩散系数

$$D = \overline{u_2^2}T_L = \overline{u_2^2}\int_0^\infty d\tau R_L(\tau)$$

亦可写成$D = \sqrt{\overline{u_2^2}}\cdot\Lambda_L$

其中$\Lambda_L = \sqrt{\overline{u_2^3}}\int_0^\infty d\tau\cdot R_L(\tau)$，代表一空间尺度，指涡扩散速度尺度的度量。

§2-3 Karman-Howarth 方程

一、 二阶相关随时间的变化及三阶速度相关

前面着重讨论了空间两点的横向二阶相关、纵向二阶相关、欧拉时间相关和拉格朗日相关。对于最一般的空间两点相关，下面进一步讨论。

设空间有 A、B 两点，两点的脉动速度分别为 u_i、u_j，则 A、B 两点二阶速度相关为

$$\overline{(u_i)_A (u_j)_B} \qquad\qquad \text{二阶张量}$$

由于在真实湍流中，粘性使动能耗散为热，湍流运动在没有外界能提供时会衰变，则流型与速度之间的关系是如何变化的呢？因此需要讨论二阶速度相关张量随时间的变化

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(u_i)_A (u_j)_B} = \overline{(u_i)_A \frac{\partial (u_j)_B}{\partial t}} + \overline{(u_j)_B \frac{\partial (u_i)_A}{\partial t}}$$

假设在流动的整个区域$\overline{U_i} = Const$，并且不随时间变化，流体是不可压的，可推得（根据脉动运动所满足的 N-S 方程）

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(u_i)_A (u_j)_B} - \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B} + \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B}\right)$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p'_A (u_j)_B} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p'_B (u_i)_A}\right] + 2\nu\frac{\partial}{\partial x_k \partial x_k}\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$$

在上式中，除包括二阶速度相关$\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$外，还包括要关

$$\overline{p'_A (u_i)_B}, \quad \overline{p'_B (u_i)_A} \text{ 及三阶相关}$$

$$\overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B}, \quad \overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B}$$

由于压力 p' 为标量，所以$\overline{p'_A (u_j)_B}$和$\overline{p'_B (u_i)_A}$构成一阶张量。而三阶

速度相关为三阶张量，为了简化方程，引入下列相关符号

$$(k_i, p) = \overline{(u_i)_A P'_B}\text{，}\quad k_p,_j = \overline{P'_A (u_i)_B}$$

$$S_{ik},_j = \overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B}\text{，}\quad S_i,_{kj} = \overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B}$$

$$Q_i,_j = \overline{(u_i)_A (u_j)_B}$$

则上式变为

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} - (\frac{\partial}{\partial x_k} S_{ik,j} + \frac{\partial}{\partial x_k} S_{i,kj}) = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial}{\partial x_k} k_{p,j} + \frac{\partial}{\partial x_k} k_{i,p}) + 2\nu \frac{\partial}{\partial x_k \partial x_k} Q_{i,j}$$

可以证明，对于各向同性湍流， $R_{i,j}$ 能仅用两个特定相关 $f(r,t)$ 和 $g(r,t)$ 来表示，而三阶相关仅有三个特定相关系数 $k(r,t)$，$h(r,t)$，$q(r,t)$ 来表示

其中 $k(r,t) = \dfrac{\overline{(u_1^2)_A (u_1)_B}}{(\sqrt{\overline{u^2}})^3} = T_{11,1}$

$$h(r,t) = \frac{\overline{(u_2^2)_A (u_1)_B}}{(\sqrt{\overline{u^2}})^3} = T_{22,1}$$

$$q(r,t) = \frac{\overline{(u_2^2)_A (u_1)_A (u_2)_B}}{(\sqrt{\overline{u^2}})^3} = T_{11,2}$$

当对于稳定的各向同性湍流，二元与三元速度关联张量可由 $f(r)$，$g(r)$ 和 $k(r)$， $h(r)$， $q(r)$ 表示。

在均匀各向同性湍流中，压力—脉动速度相关项 $k_{p,j}$ 和 $k_{i,p}$ 为零，因此二阶相关量的动力学方程可写为如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} - (\frac{\partial}{\partial x_k} S_{ik,j} + \frac{\partial}{\partial x_k} S_{i,kj}) = 2\nu \frac{\partial}{\partial x_k \partial x_k} Q_{i,j}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_3^2}$$

将 $Q_{i,j}$ 和 $S_{ik,j}$ 通过一个标量函数表示之后代入上式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u^2 f}) - \left(\overline{u^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(k' + \frac{4}{r}k\right) = 2\nu\overline{u^2}\left(f'' + \frac{4}{r}f'\right)$$

这一方程可作为研究各向同性湍流动力学性质的出发点，是湍流统计理论中最重要的动力学方程。——karman-Howarth（1938）

二、几点推论

在各向同性湍流中

1、湍能耗散方程：

将函数 f 与 k 的 Taylor 展开（在 $r \to 0$ 处）

$$f(r) = 1 - \frac{1}{2\lambda_g^2}r^2 + \left.\frac{f''''}{4!}\right|_{r\to 0} r^4 + \cdots$$

$$k(r) = \left.\frac{k'''}{6}\right|_{r\to 0} r^3 + \cdots$$

代入卡门—豪沃斯方程，首先由常数项的系数相等，得湍耗散方程

$$\frac{d\overline{u^2}}{dt} = -10\nu\frac{\overline{u^2}}{\lambda_g^2} \quad \text{或} \quad \frac{d(3\overline{u^2}/2)}{dt} = -15\nu\frac{\overline{u^2}}{\lambda_g^2}$$

可见，在各向同性湍流中不存在湍能对流、扩散和湍能产生诸因素的条件下，引起湍能变化的唯一因素是粘性耗散。因此可定义粘性耗散速度的绝对值

$$\varepsilon = 15\nu\frac{\overline{u^2}}{\lambda_g^2}$$

2、洛依强斯基不变量

求卡门—豪沃斯方程的四阶积分矩，则得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{u^2}\int_0^{\infty} r^4 f(r,t)dr\right]-(\overline{u^2})^{\frac{3}{2}}\left[r^4 k\right]_0^{\infty}=2\nu\overline{u^2}\left[r^4\frac{\partial f}{\partial r}\right]_0^{\infty}$$

通常认为在均匀湍流中所有速度关联，当两点距离很大时，都如指数般衰减，故假设 $\lim_{r\to\infty} r^4\frac{\partial f}{\partial r}=0$ 以及 $\lim_{r\to 0} r^4=0$ 。

则积分

$$\Lambda=\overline{u^2}\int_0^{+\infty} r^4 f(r,t)dr=Const$$

在湍流随时间衰减过程中是一个不变量，这一条件由洛依强斯基导出，故称为洛依强斯基不变量。

洛依强斯基将此不变量解释为由湍流发生系统所引进的总扰动量保持守恒，或都解释为湍流场内流体的总角动量守恒。