●高考明方向

驾驭正弦定理、余弦定理，

并能解决一些简洁的三角形度量问题.

★备考知考情

1.利用正、余弦定理求三角形中的边、角问题是高考

考察的热点.

2.常及三角恒等变换、平面对量相结合出如今解答题

中，综合考察三角形中的边角关系、三角形形态的

推断等问题.

3.三种题型都有可能出现，属中低档题.

一、学问梳理名师一号 P62

学问点一正弦定理

(其中 R 为△外接圆的半径)

变形 1：$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C,$

变形 2： $\sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R},$

变形 3： $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

留意：(补充)

关于边的齐次式或关于角的正弦的齐次式

均可利用正弦定理进展边角互化。

学问点二 余弦定理

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{cases}$$

留意：(补充)

〔1〕关于边的二次式或关于角的余弦

均可考虑利用余弦定理进展边角互化。

〔2〕勾股定理是余弦定理的特例

〔3〕在ΔABC中，$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow 0^\circ < A < 90^\circ$

用于推断三角形形态

名师一号 P63 问题探究 问题 3

推断三角形形态有什么方法?

推断三角形形态的两种途径：

一是化边为角；

二是化角为边，

并常用正弦(余弦)定理施行边、角转换.

学问点三三角形中常见的结论

△的面积公式有：

①S＝a·h(h表示 a边上的高)；

②S＝＝＝＝；

知两边〔或两边的积〕及其夹角可求面积

③S＝r(a＋b＋c)(r为内切圆半径).

(补充)

〔1〕 $A+B+C=\pi$

〔2〕在三角形中大边对大角，大角对大边.

〔3〕随意两边之和大于第三边，

随意两边之差小于第三边.

〔4〕有关三角形内角的常用三角函数关系式

$$\sin(B+C)=\sin A,\cos(B+C)=-\cos A,\tan(B+C)=-\tan A$$

$$\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$$

利用$A+B+C=\pi$及诱导公式可得之

〔5〕在△中的几个充要条件:

名师一号 P63 问题探究 问题 4

>⇔>⇔$a>b$⇔$A>B$.

(补充) $A>B \Leftrightarrow \cos A<\cos B$

假设α、$\beta\in R$

或$\alpha=\pi-\beta+2k\pi$（$k\in Z$）

或$\alpha=-\beta+2k\pi$（$k\in Z$）

45 套之 719

〔6〕锐角△中的常用结论

ΔABC为锐角三角形$\Leftrightarrow 0<A$、B、$C<\dfrac{\pi}{2}$

4．解斜三角形的类型

名师一号 P63 问题探究 问题 1

利用正、余弦定理可解决哪几类问题？

在解三角形时，

正弦定理可解决两类问题：

(1)两角及任一边，求其它边或角；

(2)两边及一边的对角，求其它边或角.

状况(2)中结果可能有一解、二解、无解，

应留意区分.

余弦定理可解决两类问题：

(1)两边及夹角或两边及一边对角的问题;

(2)三边问题.

(补充)两边和其中一边的对角〔如a,b,A〕

用正弦定理或余弦定理均可

名师一号 P63 问题探究 问题 2

选用正、余弦定理的原则是什么？

假设式子中含有角的余弦或边的二次式，

要考虑用余弦定理；

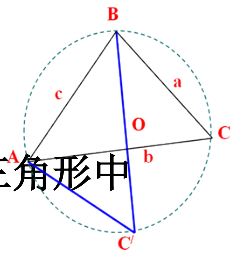
假设遇到的式子中含有角的正弦或边的一次式时，

则考虑用正弦定理；

以上特征都不明显时，则要考虑两个定理都有可能用到.

补充：

一、正弦定理推导必修 5



证明思路：

转化到特别情形直角三角形中

二、余弦定理推导必修 5

2021 陕西高考考察余弦定理的证明

18.〔本小题总分值 12 分〕

表达并证明余弦定理。

【分析】本题是课本公式、定理、性质的推导，这是高考考查的常规方向和考点，引导考生回归课本，重视基础知识学习和巩固.

【解】叙述：

余弦定理：三角形任何一边的平方等于其他两遍平方的和减去这两边与它们夹角的余弦之积的两倍。或：在△ABC 中，a，b，c 为 A，B，C 的对边，有

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．

证明：（证法一） 如图，$c^2=\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

同理可证 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，

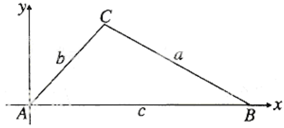
（证法二） ΔABC 中，A,B,C 所对边分别为 $a,b,c,$，以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则 $C(b\cos A,b\sin A),B(c,0)$，

∴ $a^2=|BC|^2=(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2=b^2\cos^2 A-2bc\cos A+c^2+b^2\sin^2 A$

$=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

同理可证　$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca$



二、例题分析：

〔一〕利用正、余弦定理解三角形

例 1.〔1〕名师一号 P62 对点自测 1

在△中，A＝60°，B＝75°，a＝10，则 c 等于(　　)

A．5B．10D．5

解析　由 A＋B＋C＝180°，知 C＝45°，

由正弦定理得：＝.

即＝.∴c＝.

留意：

两角及任一边，求其它边或角

正弦定理,解唯一

例 1.〔2〕名师一号 P62 对点自测 2

在△中，假设 a＝3，b＝，A＝，

则 C 的大小为.

解析　由正弦定理可知

＝＝＝，

所以 B＝或(舍去)，

(因为 $a>b$ 即 A＝> B 所以 B＝)

所以 C＝π－A－B＝π－－＝.

一解!

变式 1: 在△中，假设 b＝3，a＝，A＝，

则 C 的大小为.

答案:>1

无解!

变式 2:

在ΔABC中， $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, B=45^\circ$，

解ΔABC .

答案： $A=60^\circ, C=75^\circ, c=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

或$A=120^\circ, C=15^\circ, c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

两解!

变式 3:求边c？

留意：

知道两边和其中一边的对角〔如a，b，A〕

解三角形

可用正弦定理先求出角B也可用余弦定理先求出边c

再求解。两种方法均须留意解的个数！

可能有一解、二解、无解，应留意区分.

练习:(补充)

〔2021 山东文 17〕函数

$$f(x)=2\sin x\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos x\sin\varphi-\sin x$$

$(0<\varphi<\pi)$在$x=\pi$处取最小值。

〔I〕求φ的值；

〔II〕在ΔABC中，a,b,c分别是角 A，B，C 的对边，$a=1,b=\sqrt{2},f(A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,求角 C。

【解析】

〔Ⅰ〕f(x)＝2$\frac{1+\cos\varphi}{2}$$+\cos x\sin\varphi-\sin x$

＝(φ).

因为　f(x)在 x＝π时取最小值，

所以　(π+φ)1, 故　φ1.

又　0＜φ＜π，所以φ＝$\frac{\pi}{2}$，

〔Ⅱ〕由〔Ⅰ〕知 f(x)($\frac{\pi}{2}$).

因为 f(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 A 为△的角，

所以 A＝$\frac{\pi}{6}$.

由正弦定理得　＝$\frac{b\sin A}{a}$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 b＞a，

当$B=\frac{\pi}{4}$时，$C=\pi-A-B=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$,

当$B=\frac{3\pi}{4}$时，$C=\pi-A-B=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.

综上所述，$C=\frac{7\pi}{12}$或$C=\frac{\pi}{12}$ [来

例 2. （补充）

假设满意条件$C=60^0$，$AB=\sqrt{3},BC=a$的ΔABC有两个，求a的取值范围.

答案：$\sqrt{3}<\boldsymbol{a}<2$

留意：推断三角形解的个数常用方法：

(1)在ΔABC中，A,a,b。构造直角三角形推断

(2)利用余弦定理推断〔一元二次方程正根个数〕

勿忘大边对大角推断

两边及其中一边对角，

推断三角形解的个数的方法：

①应用三角形中大边对大角的性质

以及正弦函数的值域推断解的个数.

②在△中，a、b 和 A，

以点 C 为圆心，以边长 a 为半径画弧，

此弧及除去顶点 A 的射线的公共点的个数

即为三角形的个数，解的个数见下表：

图示 a、b、A，△解的状况.

(ⅰ) A 为钝角或直角时解的状况如下：

(ⅱ) A 为锐角时，解的状况如下：

③运用余弦定理转化为关于一元二次方程

正根个数问题

练习:

ΔABC 中，假设 $a=2,b=2\sqrt{2}$，

且三角形有两解，求角 A 的取值范围。

答案：由条件知<a，即 2<2，

∴<，

∵ a<b，∴A<B，

∴A 为锐角，∴0<A<.

例 3.〔1〕名师一号 P62 对点自测 3

在△中，a＝，b＝1，c＝2，则 A 等于(　　)

A．30°　B．45° C．60°　D．75°

解析　由余弦定理得:

＝＝＝，

∵0＜A＜π，∴A＝60°．

留意:

三边，求其它边或角

余弦定理

例 3.〔2〕名师一号 P63 高频考点　例 1(2)

(2021·新课标全国卷Ⅱ)钝角三角形的面积是，＝1，＝，则＝(　　)

A. 5　C. 2　D. 1

解:由题意知 $S_{\triangle}$＝··，

即＝×1×，解得＝，

∴B＝45°或 B＝135°.

当 B＝45°时，^{2}＝^{2}＋^{2}－2··

＝1^2＋$()^2$－2×1××＝1.

此时 ^{2}＋^{2}＝^{2}，△为直角三角形，

不符合题意；

当 B＝135°时，^{2}＝^{2}＋^{2}－2··

$=1^2+()^2-2\times1\times\times=5$，解得=．

符合题意．应选B.

留意：

两边夹角，求其它边或角

余弦定理

小结：

及待求涉及三边和一角的关系

余弦定理

例4．〔1〕名师一号P63 高频考点　例1(1)

(2021·江西卷)在△中，内角A，B，C所对的边分别是a，b，c，假设$3a=2b$，则的值为(　　)

A．－C．1

解：∵$3a=2b$，

∴由正弦定理得＝＝.

∴＝，

∴＝2×－1

＝2×－1＝－1＝.

例 4.〔2〕名师一号 P62　对点自测

△三边满意 a^2＋b^2＝c^2－，

则此三角形的最大内角为.

解析　∵a^2＋b^2－c^2＝－，

∴＝＝－，

故 C＝150°为三角形的最大内角.

留意：

〔1〕关于边的齐次式或关于角的正弦的齐次式

均可利用正弦定理进展边角互化。

〔2〕关于边的二次式或关于角的余弦