专题14 导数的概念与运算

【考点预测】

知识点一：导数的概念和几何性质

1.概念 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处瞬时变化率是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，我们称它为函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处的导数,记作 $f'(x_0)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$.

知识点诠释：

① 增量 Δx 可以是正数，也可以是负，但是不可以等于 0． $\Delta x\to 0$ 的意义： Δx 与 0 之间距离要多近有多近，即 $|\Delta x-0|$ 可以小于给定的任意小的正数；

② 当 $\Delta x\to 0$ 时， Δy 在变化中都趋于 0，但它们的比值却趋于一个确定的常数，即存在一个常数与 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限接近；

③ 导数的本质就是函数的平均变化率在某点处的极限，即瞬时变化率．如瞬时速度即是位移在这一时刻的瞬间变化率，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

2.几何意义 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义即为函数 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0，y_0)$ 处的切线的斜率．

3.物理意义 函数 $s=s(t)$ 在点 t_0 处的导数 $s'(t_0)$ 是物体在 t_0 时刻的瞬时速度 v，即 $v=s'(t_0)$； $v=v(t)$ 在点 t_0 的导数 $v'(t_0)$ 是物体在 t_0 时刻的瞬时加速度 a，即 $a=v'(t_0)$.

知识点二：导数的运算

1.求导的基本公式

基本初等函数	导函数
$f(x)=c$（c 为常数）	$f'(x)=0$
$f(x)=x^a\ (a\in Q)$	$f'(x)=ax^{a-}$
$f(x)=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$	$f'(x)=a^x\ln$
$f(x)=\log_a x\ (a>0, a\neq$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos$

$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin$

2.导数的四则运算法则

（1）函数和差求导法则：$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

（2）函数积的求导法则：$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

（3）函数商的求导法则：$g(x)\neq 0$，则$[\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

3.复合函数求导数

复合函数$y=f[g(x)]$的导数和函数$y=f(u)$，$u=g(x)$的导数间关系为 $y_x{}'=y_u{}'u_x{}'$：

【方法技巧与总结】

1.在点的切线方程

切线方程$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$的计算：函数$y=f(x)$在点$A(x_0，f(x_0))$处的切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，抓住关键$\begin{cases}y_0=f(x_0)\\k=f'(x_0)\end{cases}$.

2.过点的切线方程

设切点为$P(x_0，y_0)$，则斜率$k=f'(x_0)$，过切点的切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，

又因为切线方程过点$A(m，n)$，所以$n-y_0=f'(x_0)(m-x_0)$然后解出x_0的值.（x_0有几个值，就有几条切线）

注意：在做此类题目时要分清题目提供的点在曲线上还是在曲线外.

【题型归纳目录】

题型一：导数的定义

题型二：求函数的导数

题型三：导数的几何意义

1.在点P处切线

2.过点P的切线

3.公切线

4.已知切线求参数问题

5.切线的条数问题

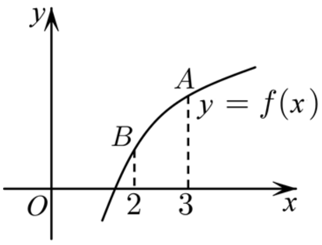
6.切线平行、垂直、重合问题

7.最值问题

【典例例题】

题型一：导数的定义

例 1．（2023·全国·高三专题练习（文））函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示，下列不等关系正确的是（　　）



A．$0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

B．$0<f'(2)<f(3)-f(2)<f'(3)$

C．$0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

D．$0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$

例 2．（2023·河南·南阳中学高三阶段练习（理））设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2$，则 $f'\left(x_0\right)=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．-2　　D．2

例 3．（2023·新疆昌吉·二模（理））若存在 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x}$，则称 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x}$ 为二元函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处对 x 的偏导数，记为 $f_x'\left(x_0,y_0\right)$；若存在 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta y}$，则称 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta y}$ 为二元函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处对 y 的偏导数，记为 $f_y'\left(x_0,y_0\right)$，已知二元函数 $f\left(x,y\right)=x^2-2xy+y^3\left(x>0,y>0\right)$，则下列选项中错误的是（　　）

A．$f_x'\left(1,3\right)=-4$　　B．$f_y'\left(1,3\right)=10$

C．$f_x'\left(m,n\right)+f_y'\left(m,n\right)$ 的最小值为 $-\dfrac{1}{3}$　　D．$f\left(x,y\right)$ 的最小值为 $-\dfrac{4}{27}$

例 4．（2023·贵州黔东南·一模（文））一个质点作直线运动，其位移 s（单位：米）与时间 t（单位：秒）满足关系式，$s=t^5+\left(t-2\right)^2-4$，则当 $t=1$ 时，该质点的瞬时速度为（　　）

A．-2 米/秒　　B．3 米/秒　　C．4 米/秒　　D．5 米/秒

例 5．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=2\ln x+8x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(1+2\Delta x\right)-f\left(1\right)}{\Delta x}$ 的值为（　　）

A．-20　　B．-10　　C．10　　D．20

例 6．（2023·浙江·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=2f'\left(3\right)x-\dfrac{2}{9}x^2+\ln x$（$f'\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的导函数），则 $f\left(1\right)=$（　　）

A．$-\frac{20}{9}$　　B．$-\frac{11}{9}$　　C．$\frac{7}{9}$　　D．$\frac{16}{9}$

例 7．（2023·浙江·高三专题练习）已知函数$f\left(x\right)$的导函数为$f'\left(x\right)$，且满足$f\left(x\right)=x^3+x^2f'\left(1\right)+2x-1$，则$f'\left(2\right)=$（　　）

A．1　　B．-9　　C．-6　　D．4

【方法技巧与总结】

对所给函数式经过添项、拆项等恒等变形与导数定义结构相同，然后根据导数定义直接写出.

题型二：求函数的导数

例 8．（2023·天津·耀华中学高二期中）求下列各函数的导数：

(1) $y=\ln(3x-2)$；

(2) $y=\frac{x}{e^x}$；

(3) $f(x)=x+2\cos x$

例 9．（2023·新疆·莎车县第一中学高二期中（理））求下列函数的导数：

(1) $y=2x^2+\ln x+\cos x$；

(2) $y=x^3e^x$

(3) $y=\ln\left(3x-1\right)$

例 10．（2023·广东·北京师范大学珠海分校附属外国语学校高二期中）求下列函数的导数：

(1) $y=x^5$；

(2) $y=x^2+2\sin x$；

(3) $y=\frac{\ln x}{x}$；

(4) $y=e^{2x-1}+\frac{1}{2}\ln\left(2x\right)$.

【方法技巧与总结】

对所给函数求导，其方法是利用和、差、积、商及复合函数求导法则，直接转化为基本函数求导问题.

题型三：导数的几何意义

1.在点 P 处切线

例 11．（2023·河北·模拟预测）曲线 $y=\mathrm{e}^{x}\sin x$ 在 $x=0$ 处的切线斜率为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．-2

例 12．（2023·安徽·巢湖市第一中学模拟预测（文））曲线 $y=\dfrac{2x+a}{x+2}$ 在点 $\left(1,b\right)$ 处的切线方程为 $\boldsymbol{kx-y+6=0}$，则 k 的值为（　　）

A．-1　　B．$-\dfrac{2}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

例 13．（2023·海南·文昌中学高三阶段练习）曲线 $y=\mathrm{e}^{x}-2x$ 在 $x=0$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．-1

例 14．（2023·安徽·巢湖市第一中学高三期中（理））已知 $f\left(x\right)=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+f'\left(0\right)\cos x$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(\dfrac{3\pi}{4},f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线的斜率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$-\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$-2\sqrt{2}$

例 15．（2023·全国·高三专题练习（文））已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，且 $f(x)=-2x^{3}+3ax^{2}-f'(1)x$，则函数 $f(x)$ 的图象在点 $(-2,f(-2))$ 处的切线的斜率为（　　）

A．-21　　B．-27　　C．-24　　D．-25

例 16．（2023·广西广西·模拟预测（理））曲线 $y=x^{3}+1$ 在点 $\left(-1,a\right)$ 处的切线方程为（　　）

A．$y=3x+3$　　B．$y=3x+1$　　C．$y=-3x-1$　　D．$y=-3x-3$

例 17．（2023·河南省浚县第一中学模拟预测（理））曲线 $y=x\ln(2x+5)$ 在 $x=-2$ 处的切线方程为（　　）

A．$4x-y+8=0$　　B．$4x+y+8=0$

C．$3x-y+6=0$　　D．$3x+y+6=0$

2.过点 P 的切线

例 18．（2023·四川·广安二中二模（文））函数 $f\left(x\right)=x^{2}\mathrm{e}^{x}$ 过点 $\left(0,0\right)$ 的切线方程为（　　）

A．$y=0$　　B．$\mathrm{e}x+y=0$　　C．$y=0$ 或 $x+\mathrm{e}y=0$　　D．$y=0$ 或 $\mathrm{e}x+y=0$

例 19．（2023·四川省成都市郫都区第一中学高三阶段练习（文））若过点 $(\dfrac{1}{2},0)$ 的直线与函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x}$ 的图象相切，则所有可能的切点横坐标之和为（　　）

A．$\mathrm{e}+1$　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

例 20.（2023·陕西安康·高三期末（文））曲线 $y=2x\ln x+3$ 过点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 的切线方程是（　　）

A．$2x+y+1=0$　　B．$2x-y+1=0$

C．$2x+4y+1=0$　　D．$2x-4y+1=0$

例 21.（2023·广东茂名·二模）过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，则切点的纵坐标为（　　）

A．e　　B．1　　C．$\frac{1}{\sqrt{e}}$　　D．$\frac{1}{\mathrm{e}}$

例 22.（2023·山东潍坊·三模）过点 $P(1,m)(m\in\mathbf{R})$ 有 n 条直线与函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的图像相切，当 n 取最大值时，m 的取值范围为（　　）

A．$-\frac{5}{\mathrm{e}^2}<m<\mathrm{e}$　　B．$-\frac{5}{\mathrm{e}^2}<m<0$　　C．$-\frac{1}{\mathrm{e}}<m<0$　　D．$m<\mathrm{e}$

3.公切线

例 23.（2023·全国·高三专题练习）若函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=x^2+x+a(x<0)$ 有公切线，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(\ln\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$　　B．$(-1,+\infty)$

C．$(1,+\infty)$　　D．$(ln2,+\infty)$

例 24.（2023·全国·高三专题练习）已知曲线 $C_1:f(x)=\mathrm{e}^x+a$ 和曲线 $C_2:g(x)=\ln(x+b)+a^2(a,b\in\mathbf{R})$，若存在斜率为 1 的直线与 C_1，C_2 同时相切，则 b 的取值范围是（　　）

A．$\left[-\frac{9}{4},+\infty\right)$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$(-\infty,1]$　　D．$\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$

例 25.（2023·江苏·南京外国语学校模拟预测）若两曲线 $y=x^2-1$ 与 $y=a\ln x-1$ 存在公切线，则正实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(0,2e]$　　B．$(0,e]$　　C．$[2e,+\infty)$　　D．$(e,2e]$

例 26.（2023·河南·南阳中学高三阶段练习（理））若直线 $y=k_1(x+1)-1$ 与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切，直线 $y=k_2(x+1)-1$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切，则 k_1k_2 的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．e　　D．e^2

例 27.（2023·河北省唐县第一中学高三阶段练习）已知函数 $f(x)=a\ln x$，$g(x)=b\mathrm{e}^x$，若直线 $y=kx(k>0)$ 与函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象都相切，则 $a+\frac{1}{b}$ 的最小值为（　　）

A．2　　B．2e　　C．e^2　　D．$\sqrt{\mathrm{e}}$

例 28.（2023·重庆市育才中学高三阶段练习）若直线 $l:y=kx+b$（$k>1$）为曲线 $f(x)=e^{x-1}$ 与曲线 $g(x)=e\ln x$ 的公切线，则 l 的纵截距 $b=$（　　）

A．0　　B．1　　C．e　　D．$-e$

例 29．（2023·全国·高三专题练习）若两曲线 $y=\ln x-1$ 与 $y=ax^2$ 存在公切线，则正实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,2\mathrm{e}]$　　B．$\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3},+\infty\right)$　　C．$\left(0,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3}\right]$　　D．$[2\mathrm{e},+\infty)$

例 30．（2023·全国·高三专题练习）若仅存在一条直线与函数 $f(x)=a\ln x$（$a>0$）和 $g(x)=x^2$ 的图象均相切，则实数 $a=$（　　）

A．e　　B．$\sqrt{\mathrm{e}}$　　C．$2\mathrm{e}$　　D．$2\sqrt{\mathrm{e}}$

4.已知切线求参数问题

例 31．（2023·湖南·模拟预测）已知 P 是曲线 $C: y=\ln x+x^2+\left(\sqrt{3}-a\right)x$ 上的一动点，曲线 C 在 P 点处的切线的倾斜角为 θ，若 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left[2\sqrt{3},0\right)$　　B．$\left[2\sqrt{2},0\right)$　　C．$\left(-\infty,2\sqrt{3}\right]$　　D．$\left(-\infty,2\sqrt{2}\right]$

例 32．（2023·广西·贵港市高级中学三模（理））已知曲线 $y=ax\mathrm{e}^x+\ln x$ 在点 $(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=3x+b$，则（　　）

A．$a=\mathrm{e}$，$b=-2$　　B．$a=\mathrm{e}$，$b=2$

C．$a=\mathrm{e}^{-1}$，$b=-2$　　D．$a=\mathrm{e}^{-1}$，$b=2$

例 33．（2023·江苏苏州·模拟预测）已知奇函数 $f(x)=\left(x^2-2x\right)(ax+b)(a\ne0)$ 在点 $(a,f(a))$ 处的切线方程为 $y=f(a)$，则 $b=$（　　）

A．-1 或 1　　B．$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．-2 或 2　　D．$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

例 34．（2023·云南昆明·模拟预测（文））若函数 $f(x)=a\sqrt{x}+\ln x$ 的图象在 $x=4$ 处的切线方程为 $y=x+b$，则（　　）

A．$a=3$，$b=2+\ln4$　　B．$a=3$，$b=-2+\ln4$

C．$a=\frac{3}{2}$，$b=-1+\ln4$　　D．$a=\frac{3}{2}$，$b=1+\ln4$

例 35．（2023·河南·方城第一高级中学模拟预测（理））已知直线 l 的斜率为 2，l 与曲线 C_1：$y=x(1+\ln x)$ 和圆 C_2：$x^2+y^2-6x+n=0$ 均相切，则 $n=$（　　）

A．-4　　B．-1　　C．1　　D．4

5.切线的条数问题

例 36．（2023·全国·高三专题练习）若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\ln x$ 的两条切线，则（　　）

A．$a<\ln b$　　B．$b<\ln a$　　C．$\ln b<a$　　D．$\ln a<b$

例 37．（2023·河南洛阳·三模（理））若过点$P\left(1,t\right)$可作出曲线$y=x^3$的三条切线，则实数t的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,1\right)$　　B．$\left(0,+\infty\right)$　　C．$\left(0,1\right)$　　D．$\left\{0,1\right\}$

例 38．（2023·河南洛阳·三模（文））若过点$P\left(1,0\right)$作曲线$y=x^3$的切线，则这样的切线共有（　　）

A．0 条　　B．1 条　　C．2 条　　D．3 条

例 39．（2023·河北·高三阶段练习）若过点$P(1,m)$可以作三条直线与曲线$C:y=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$相切，则 m 的取值范围为（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{3}{\mathrm{e}^2}\right)$　　B．$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　C．$(-\infty,0)$　　D．$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{3}{\mathrm{e}^2}\right)$

例 40．（2023·内蒙古呼和浩特·二模（理））若过点$P\left(-1,m\right)$可以作三条直线与曲线 C：$y=x\mathrm{e}^x$相切，则 m 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{3}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$　　C．$\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$　　D．$\left(-\frac{3}{\mathrm{e}^2},-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

例 41．（2023·广东深圳·二模）已知$a>0$，若过点(a,b)可以作曲线$y=x^3$的三条切线，则（　　）

A．$b<0$　　B．$0<b<a^3$　　C．$b>a^3$　　D．$b\left(b-a^3\right)=0$

6.切线平行、垂直、重合问题

例 42．（2023·安徽·合肥一中模拟预测（文））对于三次函数$f(x)$，若曲线$y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线与曲线$y=xf(x)$在点$(1,2)$处点的切线重合，则$f'(2)=$（　　）

A．-34　　B．-14　　C．-4　　D．14

例 43．（2023·山西太原·二模（理））已知函数$f\left(x\right)=a\sin x+b\cos x+cx$图象上存在两条互相垂直的切线，且$a^2+b^2=1$，则$a+b+c$的最大值为（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

例 44．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=x^2+2x$的图象在点$A(x_1，f(x_1))$与点$B(x_2，f(x_2))(x_1<x_2<0)$处的切线互相垂直，则x_2-x_1的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1

C．$\frac{3}{2}$　　D．2

例 45．（2023·全国·高三专题练习）若直线$x=a$与两曲线$y=\mathrm{e}^x,y=\ln x$分别交于A,B两点，且曲线$y=\mathrm{e}^x$在点A 处的切线为m，曲线$y=\ln x$在点B处的切线为n，则下列结论：

①$\exists a\in\left(0,+\infty\right)$，使得$m//n$；②当$m//n$时，$|AB|$取得最小值；

③$|AB|$的最小值为 2；④$|AB|$最小值小于$\frac{5}{2}$．

其中正确的个数是（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

例 46．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+2a(x<0)\\ -\dfrac{1}{x}(x>0)\end{cases}$ 的图象上存在不同的两点 A,B，使得曲线 $y=f(x)$ 在这两点处的切线重合，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-\frac{1}{8})$　　　　B．$(-1,\frac{1}{8})$　　　　C．$(1,+\infty)$　　　　D．$(-\infty,1)\cup(\frac{1}{8},+\infty)$

例 47．（2023·全国·高三专题练习（文））若曲线 $y=e^x+x$ 的一条切线 l 与直线 $x+2y-2021=0$ 垂直，则切线 l 的方程为（　　）

A．$2x-y+1=0$　　　　B．$2x+y-1=0$　　　　C．$2x-y-1=0$　　　　D．$2x+y+1=0$

7.最值问题

例 48．（2023·全国·高三专题练习）若点 P 是曲线 $y=\frac{3}{2}x^2-2\ln x$ 上任意一点，则点 P 到直线 $y=x-3$ 的距离的最小值为（　　）

A．$\frac{7\sqrt{2}}{4}$　　　　B．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．$\sqrt{5}$

例 49．（2023·山东省淄博第一中学高三开学考试）动直线 l 分别与直线 $y=2x-1$，曲线 $y=\frac{3}{2}x^2-\ln x$ 相交于 A,B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{10}$　　　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　C．1　　　　D．$\sqrt{5}$

例 50．（2023·江苏·高三专题练习）已知 a，b 为正实数，直线 $y=x-a$ 与曲线 $y=\ln(x+b)$ 相切，则 $\frac{a^2}{2-b}$ 的取值范围是（　　）

A．$(0,+\infty)$　　　　B．$(0,1)$　　　　C．$(0,\frac{1}{2})$　　　　D．$[1，+\infty)$

例 51．（2023·全国·高三专题练习）曲线 $y=e^{2x}$ 上的点到直线 $2x-y-4=0$ 的最短距离是（　　）

A．$\sqrt{5}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．1

例 52．（2023·河北衡水·高三阶段练习）已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-2x^2$ 在 $x=1$ 处的切线为 l，第一象限内的点 $P(a,b)$ 在切线 l 上，则 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{2+3\sqrt{2}}{4}$　　　　B．$\frac{3+4\sqrt{2}}{4}$　　　　C．$\frac{4+2\sqrt{3}}{5}$　　　　D．$\frac{3+\sqrt{2}}{4}$

例 53．（2023·山东聊城·二模）实数 x_1，x_2，y_1，y_2 满足：$x_1^2-\ln x_1-y_1=0$，$x_2-y_2-4=0$，则

$\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2$的最小值为（　　）

A．0　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．8

例 54．（2023·河南·许昌高中高三开学考试（理））已知函数$y=\mathrm{e}^{2x+1}$的图象与函数$y=\dfrac{\ln\left(x+1\right)+1}{2}$的图象关于某一条直线$l$对称，若$P$，$Q$分别为它们图象上的两个动点，则这两点之间距离的最小值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}\ln 2}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}\ln 2}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}\left(4+\ln 2\right)}{2}$　　D．$\sqrt{2}\left(4+\ln 2\right)$

例 55．（2023·河南·灵宝市第一高级中学模拟预测（文））已知直线$y=kx+b$是曲线$y=\sqrt{x}+1$的切线，则k^2+b^2-2b的最小值为（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．0　　C．$\dfrac{5}{4}$　　D．3

【方法技巧与总结】

函数$y=f(x)$在点x_0处的导数，就是曲线$y=f(x)$在点$P(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率.这里要注意曲线在某点处的切线与曲线经过某点的切线的区别.（1）已知$f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.（2）若求曲线$y=f(x)$过点(a,b)的切线方程，应先设切点坐标为$(x_0,f(x_0))$，由$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$过点(a,b)，求得x_0的值，从而求得切线方程.另外，要注意切点既在曲线上又在切线上.

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·河南·高三阶段练习（理））若曲线$f\left(x\right)=\dfrac{a\ln x}{x}$在点（1，$f$（1））处的切线方程为$y=x-1$，则$a$=（　　）

A．1　　B．$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$　　C．2　　D．e

2．（2023·云南曲靖·二模（文））设$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数，$f''(x)$是函数$f'(x)$的导函数，若对任意$x\in\mathrm{R}$，$f'(x)>0,f''(x)<0$恒成立，则下列选项正确的是（　　）

A．$0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$　　B．$0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$

C．$0<f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)$　　D．$0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

3．（2023·全国·高三专题练习）设$f\left(x\right)$为可导函数，且$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f\left(1\right)-f\left(1-2\triangle x\right)}{\triangle x}=-1$，则曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线斜率为（　　）

A．2　　B．-1　　C．1　　D．$-\dfrac{1}{2}$

4．（2023·河南·模拟预测（文））已知$f(x)=\ln(x+2)+\sqrt{x+1}-\dfrac{3x}{x+3}$，则曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(3,f\left(3\right)\right)$处的切线方程为(　　)

A．$2x-10y+10\ln 5-1=0$　　B．$2x+10y+10\ln 5-1=0$

C．$x-12y+12\ln 5-15=0$　　D．$x+12y+12\ln 5-15=0$

5．（2023·贵州黔东南·一模（理））一个质点作直线运动，其位移s（单位：米）与时间t（单位：秒）满足关系式$s=t^2(4t-3)^3$，则当$t=1$时，该质点的瞬时速度为（　　）

A．5 米/秒　　B．8 米/秒

C．14 米/秒　　D．16 米/秒

6．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f\left(x\right)=x\ln x$，$g\left(x\right)=x^2+ax\left(a\in\mathbf{R}\right)$，若经过点$A\left(1,0\right)$存在一条直线$l$与$f\left(x\right)$图象和$g\left(x\right)$图象都相切，则$a=$（　　）

A．0　　B．-1　　C．3　　D．-1或 3

7．（2023·湖南·长郡中学高三阶段练习）若不等式$\sqrt{\left(a-b\right)^2+\left(a-\ln b\right)^2}\ge m$对任意$a\in\mathbf{R}$，$b\in\left(0,+\infty\right)$恒成立，则实数$m$的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$　　B．$\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　C．$\left(-\infty,\sqrt{2}\right]$　　D．$\left(-\infty,2\right]$

8．（2023·辽宁沈阳·二模）若直线$y=k_1x+b_1$与直线$y=k_2x+b_2\left(k_1\ne k_2\right)$是曲线$y=\ln x$的两条切线，也是曲线$y=\mathrm{e}^x$的两条切线，则$k_1k_2+b_1+b_2$的值为（　　）

A．$\mathrm{e}-1$　　B．0　　C．-1　　D．$\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1$

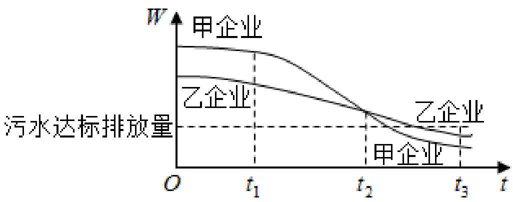
二、多选题

9．（2023·辽宁丹东·模拟预测）若过点$\left(1,a\right)$可以作出曲线$y=\left(x-1\right)\mathrm{e}^x$的切线$l$，且$l$最多有$n$条，$n\in\mathbf{N}^*$，则（　　）

A．$a\le 0$　　B．当$n=2$时，a值唯一

C．当$n=1$时，$a<-\dfrac{4}{\mathrm{e}}$　　D．na的值可以取到﹣4

10．（2023·浙江·高三专题练习）为满足人们对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改．设企业的污水排放量W与时间t的关系为$W=f(t)$，用$-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$的大小评价在$[a,b]$这段时间内企业污水治理能力的强弱．已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图所示，则下列结论中正确的有（　　）



A．在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强

B．在t_2时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强

C．在t_3时刻，甲、乙两企业的污水排放都已达标

D．甲企业在$[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$这三段时间中，在$[0,t_1]$的污水治理能力最强

11．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=e^x$，则下列结论正确的是（　　）

A．曲线$y=f(x)$的切线斜率可以是 1

B．曲线$y=f(x)$的切线斜率可以是-1

C．过点$(0,1)$且与曲线$y=f(x)$相切的直线有且只有 1 条

D．过点$(0,0)$且与曲线$y=f(x)$相切的直线有且只有 2 条

12．（2023·全国·高三专题练习）过平面内一点P作曲线$y=|\ln x|$两条互相垂直的切线l_1、l_2，切点为P_1、P_2（P_1、P_2不重合），设直线l_1、l_2分别与y轴交于点A、B，则下列结论正确的是（　　）

A．P_1、P_2两点的横坐标之积为定值

B．直线P_1P_2的斜率为定值；

C．线段AB的长度为定值

D．三角形ABP面积的取值范围为$(0,1]$

三、填空题

13．（2023·山东·肥城市教学研究中心模拟预测）已知函数$f(x)=3x-x\ln x$，则曲线$y=f(x)$在点$(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$处的切线方程为_______.

14．（2023·全国·模拟预测（文））若直线l与曲线$y=x^2$和$x^2+y^2=\frac{4}{9}$都相切，则l的斜率为______.

15．（2023·湖北武汉·模拟预测）已知函数$f(x)=f'(0)\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$，则$f(0)=$__________.

16．（2023·全国·赣州市第三中学模拟预测（理））已知$2f(x)+xf'(x)=2x\cos 2x+2(\cos x+\sin x)^2$，且$x>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=5$，那么$f(\pi)=$___________.

四、解答题

17．（2023·全国·高三专题练习（文））下列函数的导函数

（1）$y=x^4-3x^2-5x+6$；

（2）$y=2^x+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$；

（3） $y=x-\log_2 x$；

（4） $y=\dfrac{\cos x}{x}$.

18．（2023·辽宁·沈阳二中二模）用数学的眼光看世界就能发现很多数学之“美”.现代建筑讲究线条感，曲线之美让人称奇.衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率，曲线的曲率定义如下：若$f'(x)$是$f(x)$的导函数，$f''(x)$是$f'(x)$的导函数，则曲线$y=f(x)$在点$(x,f(x))$处的曲率$K=\dfrac{|f''(x)|}{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

(1)若曲线$f(x)=\ln x+x$与$g(x)=\sqrt{x}$在$(1,1)$处的曲率分别为K_1，K_2，比较K_1，K_2大小；

(2)求正弦曲线$h(x)=\sin x$（$x\in\mathbf{R}$）曲率的平方K^2的最大值.

19．（2023·全国·高三专题练习）设函数$f(x)=ax-2-\ln x(a\in R)$.

(1)若$f(x)$在点$(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$处的切线为$x-\mathrm{e}y+b=0$，求$a$，$b$的值；

(2)求$f(x)$的单调区间.

20．（2023·浙江·高三专题练习）函数$f(x)=x^3+x^2-x+1$， 直线l是$y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线.

(1)确定$f(x)$的单调性；

(2)求直线l的方程及直线l与$y=f(x)$的图象的交点.

21．（2023·北京东城·三模）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x$，曲线$y=f(x)$在点$(-1，f(-1))$处的切线方程为$y=kx+b$.

(1)求k，b的值；

(2)设函数$g(x)=\begin{cases}kx+b, & x<1,\\ \ln x, & x\ge 1.\end{cases}$，若$g(x)=t$有两个实数根$x_1,x_2$（$x_1<x_2$），将$x_2-x_1$表示为$t$的函数，并求

x_2-x_1的最小值.

22．（2023·贵州贵阳·模拟预测（理））已知$a\in\mathbf{R}$，函数$f\left(x\right)=\ln x+a\left(1-x\right)$，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}$．

(1)讨论$f\left(x\right)$的单调性；

(2)过原点分别作曲线$y=f\left(x\right)$和$y=g\left(x\right)$的切线l_1和l_2，求证：存在$a>0$，使得切线l_1和l_2的斜率互为倒数．

专题 14 导数的概念与运算

【考点预测】

知识点一：导数的概念和几何性质

1.概念 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处瞬时变化率是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，我们称它为函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处的导数,记作 $f'(x_0)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$.

知识点诠释：

① 增量 Δx 可以是正数，也可以是负，但是不可以等于 0． $\Delta x\to 0$ 的意义： Δx 与 0 之间距离要多近有

多近，即 $|\Delta x-0|$ 可以小于给定的任意小的正数；

② 当 $\Delta x\to 0$ 时， Δy 在变化中都趋于 0，但它们的比值却趋于一个确定的常数，即存在一个常数与

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限接近；

③ 导数的本质就是函数的平均变化率在某点处的极限，即瞬时变化率．如瞬时速度即是位移在这一时

刻的瞬间变化率，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

2.几何意义 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义即为函数 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0，y_0)$ 处的切线的斜率．

3.物理意义 函数 $s=s(t)$ 在点 t_0 处的导数 $s'(t_0)$ 是物体在 t_0 时刻的瞬时速度 v ，即 $v=s'(t_0)$ ； $v=v(t)$ 在点 t_0 的导数 $v'(t_0)$ 是物体在 t_0 时刻的瞬时加速度 a ，即 $a=v'(t_0)$.

知识点二：导数的运算

1.求导的基本公式

基本初等函数	导函数
$f(x)=c$（ c 为常数）	$f'(x)=0$
$f(x)=x^a$ $(a\in Q)$	$f'(x)=ax^{a-}$
$f(x)=a^x$ $(a>0，a\neq 1)$	$f'(x)=a^x\ \mathrm{l}$
$f(x)=\log_a x\ (a>0，a\neq$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln}$

$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin$

2.导数的四则运算法则

（1）函数和差求导法则：$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

（2）函数积的求导法则：$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

（3）函数商的求导法则：$g(x)\neq 0$，则$[\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

3.复合函数求导数

复合函数$y=f[g(x)]$的导数和函数$y=f(u)$，$u=g(x)$的导数间关系为 $y_x{}'=y_u{}'u_x{}'$：

【方法技巧与总结】

1.在点的切线方程

切线方程$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$的计算：函数$y=f(x)$在点$A(x_0，f(x_0))$处的切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，抓住关键$\begin{cases}y_0=f(x_0)\\k=f'(x_0)\end{cases}$.

2.过点的切线方程

设切点为$P(x_0，y_0)$，则斜率$k=f'(x_0)$，过切点的切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，

又因为切线方程过点$A(m，n)$，所以$n-y_0=f'(x_0)(m-x_0)$然后解出x_0的值.（x_0有几个值，就有几条切线）

注意：在做此类题目时要分清题目提供的点在曲线上还是在曲线外.

【题型归纳目录】

题型一：导数的定义

题型二：求函数的导数

题型三：导数的几何意义

1.在点 P 处切线

2.过点 P 的切线

3.公切线

4.已知切线求参数问题

5.切线的条数问题

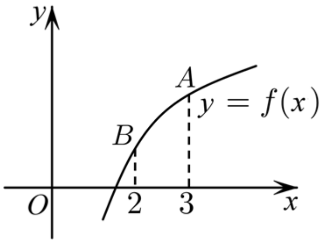
6.切线平行、垂直、重合问题

7.最值问题

【典例例题】

题型一：导数的定义

例 1．（2023·全国·高三专题练习（文））函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示，下列不等关系正确的是（　　）



A． $0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

B． $0<f'(2)<f(3)-f(2)<f'(3)$

C． $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

D． $0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$

答案：C

【解析】

分析：

根据导数的几何意义和函数平均变化率的定义，结合图象，即可求解.

【详解】

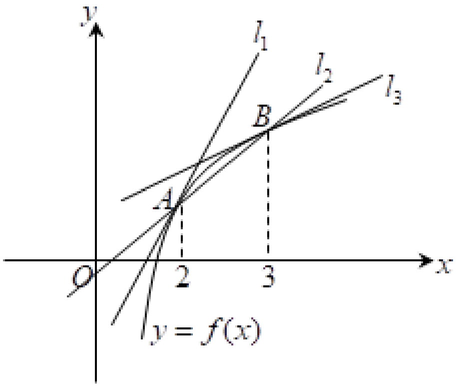
如图所示，根据导数的几何意义，可得 $f'(2)$ 表示切线 l_1 斜率 $k_1>0$，

$f'(3)$ 表示切线 l_3 斜率 $k_3>0$，

又由平均变化率的定义，可得 $\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)$，表示割线 l_2 的斜率 k_2，

结合图象，可得 $0<k_3<k_2<k_1$，即 $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$.

故选：C.



例 2．（2023·河南·南阳中学高三阶段练习（理））设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2$，则 $f'(x_0)=$（　　）

A．-1　　　　B．1　　　　C．-2　　　　D．2

答案：A

【解析】

分析：

利用函数的导数的定义求解.

【详解】

解：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

$=-2\lim\limits_{-2\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}$，

$=-2f'(x_0)=2$，

所以 $f'(x_0)=-1$，

故选：A

例 3．（2023·新疆昌吉·二模（理））若存在 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$，则称 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$；若存在 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$，则称 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记为 $f'_y(x_0,y_0)$，已知二元函数 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3\ (x>0,y>0)$，则下列选项中错误的是（　　）

A．$f'_x(1,3)=-4$　　　　B．$f'_y(1,3)=10$

C．$f'_x(m,n)+f'_y(m,n)$ 的最小值为 $-\dfrac{1}{3}$　　　　D．$f(x,y)$ 的最小值为 $-\dfrac{4}{27}$

答案：B

【解析】

分析：

根据条件求出 $f'_x(x_0,y_0)$、$f'_y(x_0,y_0)$，然后可逐一判断 ABC，

$f(x,y)=(x-y)^2+y^3-y^2\ge y^3-y^2$，然后利用导数求出右边的最小值即可.

【详解】

因为 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3$（$x>0$，$y>0$），

所以 $f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=2x_0-2y_0$，则 $f_x'(1,3)=-4$，

又 $f_y'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=-2x_0+3y_0^2$，所以 $f_y'(1,3)=25$，

因为 $f_x'(m,n)+f_y'(m,n)=2m-2n-2m+3n^2=3n^2-2n=3\left(n-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}$，

所以当 $n=\dfrac{1}{3}$ 时，$f_x'(m,n)+f_y'(m,n)$ 取得最小值，且最小值为 $-\dfrac{1}{3}$，

$f(x,y)=(x-y)^2+y^3-y^2\geq y^3-y^2$，

令 $g(x)=x^3-x^2$（$x>0$），$g'(x)=3x^2-2x$，

当 $0<x<\dfrac{2}{3}$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>\dfrac{2}{3}$ 时，$g'(x)>0$，

故 $g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}$，

从而当 $x=y=\dfrac{2}{3}$ 时，$f(x,y)$ 取得最小值，且最小值为 $-\dfrac{4}{27}$.

故选：B.

例 4.（2023·贵州黔东南·一模（文））一个质点作直线运动，其位移 s（单位：米）与时间 t（单位：秒）满足关系式，$s=t^5+(t-2)^2-4$，则当 $t=1$ 时，该质点的瞬时速度为（　　）

A．-2 米/秒　　B．3 米/秒　　C．4 米/秒　　D．5 米/秒

答案：B

【解析】

分析：

先求出导数，再代入 $t=1$ 计算即可.

【详解】

$s'=5t^4+2t-4$，当 $t=1$ 时，$s'=3$，故当 $t=1$ 时，该质点的瞬时速度为 3 米/秒.

故选：B.

例 5.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=2\ln x+8x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ 的值为（　　）

A．-20　　B．-10　　C．10　　D．20

答案：D

【解析】

分析：

根据导数的定义可得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(1+2\Delta x\right)-f\left(1\right)}{\Delta x}=2f'\left(1\right)$，再用求导公式可得 $f'\left(x\right)=\dfrac{2}{x}+8$，代入 $x=1$ 即可得解.

【详解】

因为 $f\left(x\right)=2\ln x+8x$，所以 $f'\left(x\right)=\dfrac{2}{x}+8$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(1+2\Delta x\right)-f\left(1\right)}{\Delta x}=2\lim\limits_{2\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(1+2\Delta x\right)-f\left(1\right)}{2\Delta x}=2f'\left(1\right)=20$.

故选：D

例 6．（2023·浙江·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=2f'\left(3\right)x-\dfrac{2}{9}x^2+\ln x$（$f'\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的导函数），则 $f\left(1\right)=$（　　）

A．$-\dfrac{20}{9}$　　B．$-\dfrac{11}{9}$　　C．$\dfrac{7}{9}$　　D．$\dfrac{16}{9}$

答案：D

【解析】

分析：

对函数进行求导，求出 $f'(3)=2$，再令 $x=1$ 代入解析式，即可得到答案；

【详解】

$\therefore f'(x)=2f'(3)-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{1}{x}$，$\therefore f'(3)=2f'(3)-\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}\Rightarrow f'(3)=1$，

$\therefore f(x)=2x-\dfrac{2}{9}x^2+\ln x$，$\therefore f(1)=2-\dfrac{2}{9}=\dfrac{16}{9}$，

故选：D.

例 7．（2023·浙江·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，且满足 $f\left(x\right)=x^3+x^2f'\left(1\right)+2x-1$，则 $f'\left(2\right)=$（　　）

A．1　　B．-9　　C．-6　　D．4

答案：C

【解析】

分析：

先对 $f(x)$ 进行求导，然后把 $x=1$ 代入 $f'(x)$，可列出关于 $f'\left(1\right)$ 的等式，即可解出 $f'\left(1\right)$，从而得出 $f'(x)$ 的解析式，即可求出 $f'\left(2\right)$.

【详解】

解：因为 $f\left(x\right)=x^3+x^2f'\left(1\right)+2x-1$，

所以 $f'\left(x\right)=3x^2+2xf'\left(1\right)+2$，

把 $x=1$ 代入 $f^{'}(x)$，

得 $f'(1)=3\times1^2+2f'(1)+2$，解得：$f'(1)=-5$，

所以 $f'(x)=3x^2-10x+2$，所以 $f'(2)=-6$.

故选：C.

【方法技巧与总结】

对所给函数式经过添项、拆项等恒等变形与导数定义结构相同，然后根据导数定义直接写出.

题型二：求函数的导数

例 8.（2023·天津·耀华中学高二期中）求下列各函数的导数：

(1) $y=\ln(3x-2)$；

(2) $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$；

(3) $f(x)=x+2\cos x$

答案：(1) $y'=\dfrac{3}{3x-2}$

(2) $y'=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$

(3) $f'(x)=1-2\sin x$

【解析】

分析：

根据导数求导法则及基本初等函数的导数求解即可.

(1)

$\because y=\ln(3x-2)$，

$\therefore y'=\dfrac{1}{3x-2}\times(3x-2)'=\dfrac{3}{3x-2}$.

(2)

$\because y=\dfrac{x}{e^x}$，

$y'=\dfrac{(x)'\mathrm{e}^x-x(\mathrm{e}^x)'}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$.

(3)

$\because f(x)=x+2\cos x$，

$\therefore f'(x)=1-2\sin x$.

例 9.（2023·新疆·莎车县第一中学高二期中（理））求下列函数的导数：

(1) $y=2x^2+\ln x+\cos x$；

(2) $y=x^3e^x$

(3) $y=\ln(3x-1)$

答案：(1) $y'=4x+\frac{1}{x}-\sin x$

(2) $y'=\left(x^3+3x^2\right)e^x$

(3) $y'=\frac{3}{3x-1}$

【解析】

分析：

利用导数四则运算法则和复合函数求导法则计算即可得到结果.

(1)

$y'=\left(2x^2\right)'+(\ln x)'+(\cos x)'=4x+\frac{1}{x}-\sin x$

(2)

$y'=\left(x^3\right)'e^x+x^3\left(e^x\right)'=3x^2e^x+x^3e^x=\left(x^3+3x^2\right)e^x$

(3)

$y'=\frac{1}{3x-1}\cdot(3x-1)'=\frac{3}{3x-1}$

例 10.（2023·广东·北京师范大学珠海分校附属外国语学校高二期中）求下列函数的导数：

(1) $y=x^5$；

(2) $y=x^2+2\sin x$；

(3) $y=\frac{\ln x}{x}$；

(4) $y=e^{2x-1}+\frac{1}{2}\ln(2x)$.

答案：(1) $y'=5x^4$

(2) $y'=2x+2\cos x$

(3) $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$

(4) $y'=2e^{2x-1}+\frac{1}{2x}$

【解析】

分析：

利用导数公式和运算法则求解.

(1)

因为 $y=x^5$，

所以 $y'=5x^4$；

(2)

因为 $y=x^2+2\sin x$，

所以 $y'=2x+2\cos x$；

(3)

因为 $y=\frac{\ln x}{x}$，

所以 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$；

(4)

因为 $y=e^{2x-1}+\frac{1}{2}\ln(2x)$，

所以 $y'=2e^{2x-1}+\frac{1}{2x}$

【方法技巧与总结】

对所给函数求导，其方法是利用和、差、积、商及复合函数求导法则，直接转化为基本函数求导问题.

题型三：导数的几何意义

1.在点 P 处切线

例 11．（2023·河北·模拟预测）曲线 $y=e^x\sin x$ 在 $x=0$ 处的切线斜率为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．-2

答案：B

【解析】

分析：

即求曲线在(0,*f*(0))处的导数.

【详解】

$y'=e^x\sin x+e^x\cos x$，$k=y'|_{x=0}=1$.

故选：B.

例 12．（2023·安徽·巢湖市第一中学模拟预测（文））曲线 $y=\frac{2x+a}{x+2}$ 在点 $(1,b)$ 处的切线方程为 $\boldsymbol{kx-y+6=0}$，则 k 的值为（　　）

A．-1　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

答案：A

【解析】

分析：

依据题意列出关于a、b、k的方程组，即可求得k的值

【详解】

由切点$(1,b)$在曲线上，得$b=\frac{2+a}{3}$①；

由切点$(1,b)$在切线上，得$k-b+6=0$②；

对曲线求导得$y'=\frac{4-a}{(x+2)^2}$，∴$y'|_{x=1}=\frac{4-a}{3^2}=k$，即$4-a=9k$③，

联立①②③$\begin{cases} b=\frac{2+a}{3} \\ k-b+6=0 \\ 4-a=9k \end{cases}$，解之得$\begin{cases} a=13 \\ b=5 \\ k=-1 \end{cases}$

故选：A.

例 13．（2023·海南·文昌中学高三阶段练习）曲线$y=e^x-2x$在$x=0$处的切线的倾斜角为α，则$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．-1

答案：A

【解析】

分析：

利用导数的几何意义求得切线的斜率，求得其倾斜角$\alpha=\frac{3\pi}{4}$，即可求解.

【详解】

由题意，函数$y=e^x-2x$，可得$y'=e^x-2$，

则$y'|_{x=0}=-1$，即曲线在$x=0$处的切线的斜率为-1，即$\tan\alpha=-1$，

因为$0\le\alpha<\pi$，所以$\alpha=\frac{3\pi}{4}$，所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：A.

例 14．（2023·安徽·巢湖市第一中学高三期中（理））已知$f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f'(0)\cos x$，则曲线$y=f(x)$在点$\left(\frac{3\pi}{4},f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$处的切线的斜率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$-\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$-2\sqrt{2}$

答案：D

【解析】

分析：

根据导数的几何意义，写出切线方程的公式，直接计算求解即可

【详解】

对 $f\left(x\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(0\right)\cos x=2\sin x+f'\left(0\right)\cos x$，

求导可得，$f'\left(x\right)=2\cos x-f'\left(0\right)\sin x$，得到 $f'(0)=2$，所以，

$f\left(x\right)=2\sin x+2\cos x$，所以，$f'\left(x\right)=2\cos x-2\sin x$，

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\cos\frac{3\pi}{4}-2\sin\frac{3\pi}{4}=-2\sqrt{2}$$

故选 D

例 15．（2023·全国·高三专题练习（文））已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，且 $f(x)=-2x^3+3ax^2-f'(1)x$，则函数 $f(x)$ 的图象在点 $(-2,f(-2))$ 处的切线的斜率为（　　）

A．-21　　B．-27　　C．-24　　D．-25

答案：A

【解析】

分析：

求导数得出 $f'(1)$，结合奇函数定义得函数解析式，然后计算 $f'(-2)$ 即可．

【详解】

$f(x)$ 是奇函数，

$f(-x)=2x^3+3ax^2+f'(1)x=-f(x)=2x^3-3ax^2+f'(1)x$ 恒成立，所以 $a=0$，

$f(x)=-2x^3-f'(1)x$，$f'(x)=-6x^2-f'(1)$，

所以 $f'(1)=-6-f'(1)$，$f'(1)=-3$，即 $f'(x)=-6x^2+3$，

$f'(-2)=-6\times(-2)^2+3=-21$．

故选：A．

例 16．（2023·广西广西·模拟预测（理））曲线 $y=x^3+1$ 在点 $\left(-1,a\right)$ 处的切线方程为（　　）

A．$y=3x+3$　　B．$y=3x+1$　　C．$y=-3x-1$　　D．$y=-3x-3$

答案：A

【解析】

分析：

利用导数的几何意义得到切线的斜率，利用点斜式求出切线方程.

【详解】

$\because y=f\left(x\right)=x^3+1$

$\therefore f'\left(x\right)=3x^2$，所以 $f'\left(-1\right)=3$，

又当$x=-1$时，$a=x^3+1=-1+1=0$，

所以$y=x^3+1$在点$(-1,a)$处的切线方程为：$y=3(x+1)$，即$y=3x+3$.

故选：A.

例 17.（2023·河南省浚县第一中学模拟预测（理））曲线$y=x\ln(2x+5)$在$x=-2$处的切线方程为（　　）

A．$4x-y+8=0$　　B．$4x+y+8=0$

C．$3x-y+6=0$　　D．$3x+y+6=0$

答案：B

【解析】

分析：

将$x=-2$代入曲线方程求得切点坐标，利用导数的几何意义求解切线斜率，利用直线方程点斜式求解即可.

【详解】

解：因为$y=x\ln(2x+5)$，所以$y'=\left[x\ln(2x+5)\right]'=\ln(2x+5)+\dfrac{2x}{2x+5}$，所以$y'|_{x=-2}=-4$.

又当$x=-2$时，$y=x\ln 1=0$，故切点坐标为$(-2,0)$，所以切线方程为$4x+y+8=0$.

故选：B.

2.过点 P 的切线

例 18.（2023·四川·广安二中二模（文））函数$f(x)=x^2e^x$过点$(0,0)$的切线方程为（　　）

A．$y=0$　　B．$ex+y=0$　　C．$y=0$或$x+ey=0$　　D．$y=0$或$ex+y=0$

答案：C

【解析】

分析：

设切点(m,m^2e^m)，利用导数的几何意义求该切点上的切线方程，再由切线过$(0,0)$代入求参数 m，即可得切线方程.

【详解】

由题设$f'(x)=(2x+x^2)e^x$，若切点为(m,m^2e^m)，则$f'(m)=(2m+m^2)e^m$，

所以切线方程为$y-m^2e^m=(2m+m^2)e^m(x-m)$，又切线过$(0,0)$，

则$m^2e^m=(2+m)m^2e^m$，可得$m=0$或$m=-1$，

当$m=0$时，切线为$y=0$；当$m=-1$时，切线为$ey-1=-(x+1)$，整理得$x+ey=0$.

故选：C

例 19.（2023·四川省成都市郫都区第一中学高三阶段练习（文））若过点$(\dfrac{1}{2},0)$

的直线与函数 $f(x)=xe^x$ 的图象相切，则所有可能的切点横坐标之和为（　　）

A．$e+1$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

答案：D

【解析】

分析：

由已知，设出切点，写出切线方程，然后把点 $(\frac{1}{2},0)$ 代入方程，解出切点坐标即可完成求解.

【详解】

因为函数 $f(x)=xe^x$，所以 $f'(x)=(x+1)e^x$，

设切点为 $(x_0,x_0e^{x_0})$，则切线方程为：$y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(x-x_0)$，

将点 $(\frac{1}{2},0)$ 代入得 $-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(\frac{1}{2}-x_0)$，

即 $-x_0=(x_0+1)(\frac{1}{2}-x_0)$，解得 $x_0=-\frac{1}{2}$ 或 $x_0=1$，

所以切点横坐标之和为 $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

故选：D.

例 20．（2023·陕西安康·高三期末（文））曲线 $y=2x\ln x+3$ 过点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 的切线方程是（　　）

A．$2x+y+1=0$　　B．$2x-y+1=0$

C．$2x+4y+1=0$　　D．$2x-4y+1=0$

答案：B

【解析】

分析：

设出切点，结合导数列方程，由此求出切点坐标并求出切线的斜率，进而可得切线方程.

【详解】

由题意可得点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 不在曲线 $y=2x\ln x+3$ 上，

设切点为 (x_0,y_0)，因为 $y'=2\ln x+2$，

所以所求切线的斜率 $k=2\ln x_0+2=\frac{y_0}{x_0+\frac{1}{2}}=\frac{2y_0}{2x_0+1}$，

所以 $y_0=2x_0\ln x_0+2x_0+\ln x_0+1$.

因为点 (x_0,y_0) 是切点，所以 $y_0=2x_0\ln x_0+3$，

所以$2x_0\ln x_0+2x_0+\ln x_0+1=2x_0\ln x_0+3$，即$2x_0+\ln x_0-2=0$.

设$f(x)=2x+\ln x-2$，明显$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$f(1)=0$，

所以$2x_0+\ln x_0-2=0$有唯一解$x_0=1$，则所求切线的斜率$k=2$，

故所求切线方程为$y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)=2x+1$.

故选：B.

例 21.（2023·广东茂名·二模）过坐标原点作曲线$y=\ln x$的切线，则切点的纵坐标为（　　）

A．e　　　　B．1　　　　C．$\frac{1}{\sqrt{e}}$　　　　D．$\frac{1}{\mathrm{e}}$

答案：B

【解析】

分析：

设出切点$P(x_0,\ln x_0)(x_0>0)$，利用导数得到切线的斜率，写出切线方程，将原点坐标代入切线方程，解出即可.

【详解】

解：设切点$P(x_0,\ln x_0)(x_0>0)$，

由$y=\ln x$，得$y'=\frac{1}{x}$，所以$y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，

∴曲线在点P处的切线l方程为$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

又l过（0，0），∴$-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(-x_0)$，解得$x_0=e$，

∴切点$P(e,1)$，纵坐标为 1.

故选：B.

例 22.（2023·山东潍坊·三模）过点$P(1,m)(m\in\mathbf{R})$有n条直线与函数$f(x)=x\mathrm{e}^x$的图像相切，当n取最大值时，m的取值范围为（　　）

A．$-\frac{5}{\mathrm{e}^2}<m<\mathrm{e}$　　　　B．$-\frac{5}{\mathrm{e}^2}<m<0$　　　　C．$-\frac{1}{\mathrm{e}}<m<0$　　　　D．$m<\mathrm{e}$

答案：B

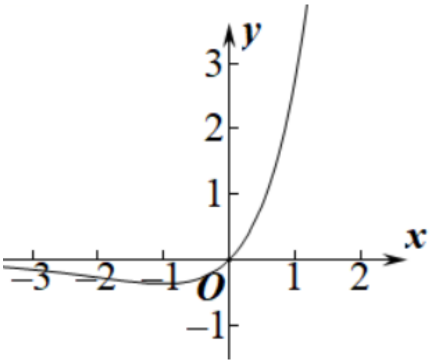
【解析】

分析：

求导分析$f(x)=x\mathrm{e}^x$的图象可得$n=3$，再设切点坐标为(x_0,y_0)，由题可得$m=(-x_0^2+x_0+1)\cdot\mathrm{e}^{x_0}$有三根，再构造函数$g(x)=(-x^2+x+1)\cdot\mathrm{e}^x$求导分析图象单调性与最值即可

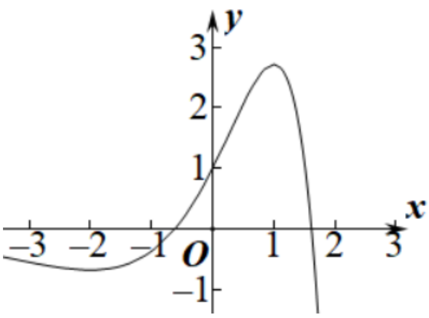
【详解】

由 $f(x)=xe^{x}$， $f'(x)=(x+1)e^{x}$，故当 $x<-1$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，且 $f(x)<0$；当 $x>-1$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，结合图象易得，过点 $P(1,m)(m\in\mathbf{R})$ 至多有 3 条直线与函数 $f(x)=xe^{x}$ 的图像相切，故 $n=3$.



此时，设切点坐标为 (x_0,y_0)，则切线斜率 $k=(x_0+1)\cdot e^{x_0}$，所以切线方程为

$y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)\cdot e^{x_0}(x-x_0)$，将 $P(1,m)$ 代入得 $m=(-x_0^2+x_0+1)\cdot e^{x_0}$，存在三条切线即函数 $m=(-x^2+x+1)\cdot e^{x}$ 有三个不同的根，又 $g'(x)=-(x-1)(x+2)\cdot e^{x}$，易得在 $(-2,1)$ 上， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增；在 $(-\infty,-2)$ 和 $(1,+\infty)$ 上， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，画出图象可得当 $g(-2)<m<0$，即 $-\frac{5}{e^2}<m<0$ 时符合题意



故选：B

【点睛】

本题主要考查了利用导数解决切线的问题，同时也考查了构造函数，求导分析单调性，进而确定根的个数与参数取值范围的问题，属于难题

3.公切线

例23．（2023·全国·高三专题练习）若函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=x^2+x+a(x<0)$ 有公切线，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(\ln\frac{1}{2e},+\infty\right)$　　　　B．$(-1,+\infty)$

C．$(1,+\infty)$　　　　　　　　　　　　　　D．$(ln2,+\infty)$

答案：B

【解析】

分析：

分别求出导数，设出各自曲线上的切点，得出两个切线方程，由两个切线方程可整理成a关于一个变量x_1的函数，利用导数求出函数的取值范围即可求解.

【详解】

设公切线与函数$f(x)=\ln x$切于点$A(x_1,\ln x_1)(x_1>0)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}$，切线的斜率为$\frac{1}{x_1}$，

则切线方程为$y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即$y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1-1$

设公切线与函数$g(x)=x^2+x+a$切于点$B(x_2,x_2^2+x_2+a)(x_2<0)$，

$g'(x)=2x+1$，切线的斜率为$2x_2+1$，

则切线方程为$y-(x_2{}^2+x_2+a)=(2x_2+1)(x-x_2)$，即$y=(2x_2+1)x-x_2{}^2+a$

所以有$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=2x_2+1\\ \ln x_1-1=-x_2{}^2+a\end{cases}$

因为$x_1>0$，所以$2x_2+1>0$，可得$-\frac{1}{2}<x_2<0$，$0<2x_2+1<1$，即$0<\frac{1}{x_1}<1$，

由$\frac{1}{x_1}=2x_2+1$可得：$x_2=\frac{1}{2x_1}-\frac{1}{2}$，

所以$a=\ln x_1+x_2{}^2-1=\ln x_1+\left(\frac{1}{2x_1}-\frac{1}{2}\right)^2-1=-\ln\frac{1}{x_1}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2-1$，

令$t=\frac{1}{x_1}$，则$t\in(0,1)$，$a=\frac{1}{4}(t-1)^2-1-\ln t=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t-\ln t-\frac{3}{4}$，

设$h(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t-\ln t-\frac{3}{4}(0<t<1)$，则$h'(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}-\frac{1}{t}=\frac{t^2-t-2}{2t}=\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}{2t}<0$，

所以$h(t)$在$(0,1)$上为减函数，

则$h(t)>h(1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-1$，所以$a>-1$，

所以实数a的取值范围是$(-1,+\infty)$，

故选：B．

【点睛】

方法点睛：求曲线过点 $A(a,b)$ 的切线的方程的一般步骤是：

（1）设切点 $P\ (x_0, f(x_0))$

（2）求出 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，即 $y=f(x)$ 在点 $P\ (x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率；

（3）构建关系 $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)-b}{x_0-a}$ 解得 x_0；

（4）由点斜式求得切线方程 $y-b=f'(x_0)\cdot(x-a)$.

例 24．（2023·全国·高三专题练习）已知曲线 $C_1: f(x)=\mathrm{e}^x+a$ 和曲线 $C_2: g(x)=\ln(x+b)+a^2\ (a,b\in\mathbf{R})$，若存在斜率为 1 的直线与 C_1， C_2 同时相切，则 b 的取值范围是（　　）

A．$\left[-\dfrac{9}{4},+\infty\right)$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$(-\infty,1]$　　D．$\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$

答案：D

【解析】

分析：

分别求出两函数的导函数，再分别设直线与两曲线的切点的横坐标，由于斜率为 1 即导数值为 1 分别求出切点横坐标，可得切线方程，再根据切线方程系数相等得 b 与 a 的关系式，再根据二次函数性质可求出 b 的取值范围．

【详解】

$f'(x)=\mathrm{e}^x$， $g'(x)=\dfrac{1}{x+b}$，设斜率为1的切线在 C_1， C_2 上的切点横坐标分别为 x_1， x_2，

由题知 $e^{x_1}=\dfrac{1}{x_2+b}=1$， ∴ $x_1=0$， $x_2=1-b$，

两点处的切线方程分别为 $y-(1+a)=x$ 和 $y-a^2=x-(1-b)$，

故 $a+1=a^2-1+b$，即 $b=2+a-a^2=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\le\dfrac{9}{4}$.

故选：*D*.

例 25．（2023·江苏·南京外国语学校模拟预测）若两曲线 $y=x^2-1$ 与 $y=a\ln x-1$ 存在公切线，则正实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(0,2e]$　　B．$(0,e]$　　C．$[2e,+\infty)$　　D．$(e,2e]$

答案：A

【解析】

分析：

分别求出导数，设出切点，得到切线方程，再由两点的斜率公式，结合切点满足曲线方程，运用导数求的单调区间、极值、最值即可得出 a 的取值范围.

【详解】

设 $A\left(x_1,x_1^2-1\right),B\left(x_2,a\ln x_2-1\right),y_1'=2x,y_2'=\frac{a}{x},k_1=2x_1,k_2=\frac{a}{x_2}$

切线：$y-\left(x_1^2-1\right)=2x_1\left(x-x_1\right)$，即 $y=2x_1x-x_1^2-1$

切线：$y-\left(a\ln x_2-1\right)=\frac{a}{x_2}\left(x-x_2\right)$，即 $y=\frac{a}{x_2}x-a+a\ln x_2-1$，

$\therefore\begin{cases}2x_1=\frac{a}{x_2}\\-x_1^2-1=-a+a\ln x_2-1\end{cases},\therefore a=4x_2^2\left(1-\ln x_2\right)$

令 $f\left(x\right)=4x^2\left(1-\ln x\right),f'\left(x\right)=8x\left(1-\ln x\right)+4x^2\left(-\frac{1}{x}\right)$

$=8x-8x\ln x-4x=4x-8x\ln x=4x\left(1-2\ln x\right)=0,x=\sqrt{e}$

$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\sqrt{e}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\sqrt{e},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\sqrt{e}\right)=2e,\therefore a\in\left(0,2e\right]$.

故选：A．

例 26．（2023·河南·南阳中学高三阶段练习（理））若直线 $y=k_1\left(x+1\right)-1$ 与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切，直线 $y=k_2\left(x+1\right)-1$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切，则 k_1k_2 的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．1　　　　C．e　　　　D．e^2

答案：B

【解析】

分析：

设出切点，求出 $k_1=\mathrm{e}^{x_1}$，$k_2=\frac{1}{x_2}$，根据斜率列出方程，得到 $x_1\mathrm{e}^{x_1}=1$，$x_2\ln x_2=1$，构造 $f\left(x\right)=x\ln x$，利用函数单调性和图象特征，求出 $x_2=\mathrm{e}^{x_1}$，从而求出答案.

【详解】

设直线 $f=k_1\left(x+1\right)-1$ 与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切于点 $\left(x_1,\mathrm{e}^{x_1}\right)$，

直线 $y=k_2\left(x+1\right)-1$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于点 $\left(x_2,\ln x_2\right)$，

则 $k_1=\mathrm{e}^{x_1}$，且 $k_1=\frac{\mathrm{e}^{x_1}+1}{x_1+1}$，所以 $x_1\mathrm{e}^{x_1}=1$，

$k_2=\frac{1}{x_2}$，且 $k_2=\frac{\ln x_2+1}{x_2+1}$，所以 $x_2\ln x_2=1$，

令 $f\left(x\right)=x\ln x$，$f'\left(x\right)=1+\ln x$，