期末专题05 概率（条件概率、全概率、贝叶斯公式）与统计小题综合（精选50题）

一、单选题

1．（22-23高二下·江苏苏州·期末）已知A,B为某随机试验的两个事件，$\overline{A}$为事件A的对立事件．若$P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{5}{8}$，$P(AB)=\frac{1}{2}$，则$P(B|\overline{A})=$（　）

A．$\frac{3}{8}$　　B．$\frac{5}{8}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】A

【分析】根据已知可求得$P(\overline{A}B)=\frac{1}{8}$，$P(\overline{A})=\frac{1}{3}$，然后根据条件概率，即可得出答案.

【详解】由已知可得，$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，$P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{1}{3}$，

根据条件概率可知，$P(B|\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}$.

故选：A.

2．（22-23高二下·河北唐山·期末）若$P(A|B)=\frac{2}{3}$，$P(\overline{A})=\frac{1}{3}$，则事件$A$与$B$的关系是（　）.

A．事件A与B相互独立　　B．事件A与B对立

C．事件A与B互斥　　D．事件A与B互斥又相互独立

【答案】A

【分析】根据$P(A)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，即可判断事件关系.

【详解】由题设$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{2}{3}=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，

所以$P(AB)=P(A)P(B)\neq 0$，故A与B相互独立，则A与B不可能互斥.

故选：A

3．（22-23高二下·江苏连云港·期末）某杂交水稻研究小组先培育出第一代杂交水稻，再由第一代培育出第二代，第二代培育出第三代，以此类推，且亲代与子代的每穗总粒数之间的关系如下表所示：

代数代码x	1	2	3	4
总粒数y	197	193	201	209

通过上面四组数据得到了 x 与 y 之间的线性回归方程是 $\hat{y}=4.4x+\hat{a}$，预测第十代杂交水稻每穗的总粒数为（　）

A．233　　B．234　　C．235　　D．236

【答案】A

【分析】求出样本中心，然后确定回归直线方程，即可求解预测当 $x=10$ 时，y 的估计值.

【详解】由题意可知：$\overline{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=2.5$，$\overline{y}=\frac{197+193+201+209}{4}=200$.

因为回归直线方程经过样本中心，所以 $200=4.4\times2.5+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=189$，

回归直线方程为：$\hat{y}=4.4x+189$，

当 $x=10$ 时，y 的估计值为：$4.4\times10+189=233$.

故选：A.

4．（22-23 高二下·江苏泰州·期末）已知 x，y 的取值如下表所示，从散点图分析可知 y 与 x 线性相关，如果线性回归方程为 $\hat{y}=0.95x+2.5$，则下列说法不正确的是（　）

x	0	1	2	3	4
y	2.3	4.3	4.4	4.8	m

A．m 的值为 6.2

B．回归直线必过点（2，4.4）

C．样本点（4，m）处的残差为 0.1

D．将此图表中的点（2，4.4）去掉后，样本相关系数 r 不变

【答案】C

【分析】根据平均数的定义及样本中心在经验回归直线方程上，利用残差的定义及样本相关系数的公式即可求解.

【详解】由题意可知，$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(0+1+2+3+4)=2$,

$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(2.3+4.3+4.4+4.8+m)=\frac{1}{5}\times(15.8+m)$,

所以样本中心为$\left(2,\frac{15.8+m}{5}\right)$,

将点$\left(2,\frac{15.8+m}{5}\right)$代入 $\hat{y}=0.95x+2.5$，可得 $\frac{15.8+m}{5}=0.95\times2+2.5$，解得 $m=6.2$，故 A 正确；

由 $m=6.2$，得样本中心为$(2,4.4)$，所以回归直线必过点（2，4.4），故 B 正确；

当 $x=4$ 时，$\hat{y}=0.95\times4+2.5=2.375$，

由 $m=6.2$，得样本点 $(4,6.2)$ 处的残差为 $6.2-2.375=3.825$，故 C 错误；

因为样本中心为 $(2,4.4)$，

所以 $x_3-\overline{x}=2-2=0, y_3-\overline{y}=4.4-4.4=0,$

由相关系数公式知，$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}$，将此图表中的点（2，4.4）去掉后，样本相关系数 r 不变，故 D 正确；

故选：C.

5．（22-23 高二下·河北张家口·期末）某校团委对“学生喜欢体育和性别是否有关”作了一次调查，其中被调查的男、女生人数相同，男生喜欢体育的人数占男生人数的 $\frac{4}{5}$，女生喜欢体育的人数占女生人数的 $\frac{3}{5}$，若有 95%以上的把握认为是否喜欢体育和性别有关，则调查人数中男生人数可能是（　）

α	0.050	0.010
x_α	3.841	6.635

【附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$】

A．35　　B．39　　C．40　　D．50

【答案】D

【分析】设男生女生人数均为 x，根据卡方公式得 $\chi^2=\dfrac{2x}{21}$，根据表格得到不等式，解出即可.

【详解】设男生女生人数均为 x，则在 2×2 列联表中 $a=\frac{4}{5}x, b=\frac{1}{5}x, c=\frac{3}{5}x, d=\frac{2}{5}x$，

$$\chi^2=\frac{2x\left(\frac{8}{25}x^2-\frac{3}{25}x^2\right)^2}{\frac{21}{25}x^4}=\frac{2x}{21},$$

若有 95% 以上的把握认为学生是否喜欢体育和性别有关，

可知 $\dfrac{2x}{21}>3.841$，解得 $x>40.3305$，

又 x 是 5 的整数倍，可得男生人数可取 50，

故选：D.

6.（22-23 高二下·河南开封·期末）已知函数 $f\left(x\right)=x^{2}-2\xi x+3$ 在 $\left(-\infty,-1\right)$ 上单调递减的概率为 $\frac{1}{2}$，且随机变量 $\xi\sim N\left(\mu,1\right)$，则 $P\left(1\le\xi\le2\right)=$（附：若 $X\sim N\left(\mu,\sigma^{2}\right)$，则 $P\left(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma\right)=0.6827$，$P\left(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma\right)=0.9545$，$P\left(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma\right)=0.9973$)（　）

A．0.1359　　　B．0.01587　　　C．0.0214　　　D．0.01341

【答案】C

【分析】

根据二次函数的单调性可求得 $P\left(\xi\ge-1\right)=\frac{1}{2}$，从而可得 $\mu=-1$，再根据三段区间法即可求解.

【详解】根据题意 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-1\right)$ 上单调递减，可得 $\xi\ge-1$，故 $P\left(\xi\ge-1\right)=\frac{1}{2}$，$\because\xi\sim N\left(u,1\right)$，$\therefore\mu=-1$，

所以 $P\left(1\le\xi\le2\right)=P\left(-1\le x\le2\right)-P\left(-1\le\xi\le1\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left[P\left(-4\le\xi\le2\right)-P\left(-3\le\xi\le1\right)\right]=\frac{1}{2}\times\left(0.9973-0.9545\right)=0.0214$.

故选：C.

7.（22-23 高二下·吉林长春·期末）设甲袋中有 3 个红球和 4 个白球，乙袋中有 1 个红球和 2 个白球，现从甲袋中任取 1 球放入乙袋，再从乙袋中任取 2 球，记事件 A="从甲袋中任取 1 球是红球"，事件 B="从乙袋中任取 2 球全是白球"，则下列说法正确的是（　）

A．$P(B)=\frac{9}{14}$　　　　B．$P(AB)=\frac{6}{7}$

C．$P\left(A|B\right)=\frac{1}{5}$　　　　D．事件 A 与事件 B 相互独立

【答案】C

【分析】由古典概型概率计算公式，以及条件概率公式分项求解判断即可.

【详解】现从甲袋中任取 1 球放入乙袋，再从乙袋中任取 2 球可知，从甲袋中任取 1 球对乙袋中任取 2 球有影响，事件 A 与事件 B 不是相互独立关系，　故 D 错误；

从甲袋中任取 1 球是红球的概率为：$P\left(A\right)=\frac{3}{7}$，

从甲袋中任取 1 球是白球的概率为：$\frac{4}{7}$，

所以乙袋中任取 2 球全是白球的概率为：

$P\left(B\right)=\frac{C_{3}^{1}C_{2}^{2}}{C_{7}^{1}C_{4}^{2}}+\frac{C_{4}^{1}C_{3}^{2}}{C_{7}^{1}C_{4}^{2}}=\frac{1}{14}+\frac{2}{7}=\frac{5}{14}$，故 A 错误；

$P(AB)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_7^1C_4^2}=\frac{1}{14}$，故 B 错误；

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{14}\times\frac{14}{5}=\frac{1}{5}$，故 C 正确；

故选：C

8．（22-23 高二下·河北张家口·期末）设随机变量 X 的分布列如下（其中 $0<p<1$），$D(X)$ 表示 X 的方差，则当 p 从 0 增大到 1 时（　）

X	0	1	2
p	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

A．$D(X)$ 增大　　B．$D(X)$ 减小

C．$D(X)$ 先减后增　　D．$D(X)$ 先增后减

【答案】D

【分析】首先根据期望公式得 $E(X)=\frac{1}{2}+p$，再根据方差计算公式得 $D(X)$ 的表达式，最后利用二次函数的性质即可得到答案.

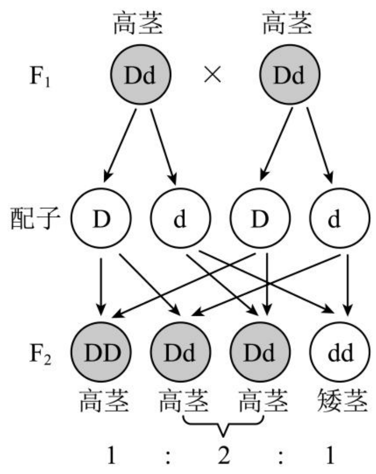
【详解】由分布列可得 $E(X)=0\times\frac{1-p}{2}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{p}{2}=\frac{1}{2}+p$，

则 $D(X)=\frac{1-p}{2}\left(\frac{1}{2}+p\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+p-1\right)^2+\frac{p}{2}\left(\frac{1}{2}+p-2\right)^2=-p^2+p+\frac{1}{4}=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，

因为 $0<p<1$，所以 $D(X)$ 先增后减，

故选：D.

9．（22-23 高二下·重庆·期末）生物的性状是由遗传因子决定的.每个因子决定着一种特定的性状，其中决定显性性状的为高茎遗传因子，用大写字母（如 D ）来表示；决定隐性性状的为矮茎遗传因子，用小写字母（如 d ）来表示.如图，在孟德尔豌豆试验中，F_1 的基因型为 Dd ，子二代 F_2 的基因型为 DD,Dd,dd ，且这三种基因型的比为 $1:2:1$.如果在子二代中任意选取 2 颗豌豆进行杂交试验，则子三代 F_3 中高茎的概率为(　　)



A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{6}$

【答案】C

【分析】利用列举法，列举出所有的可能结果，再利用全概率公式求解即可.

【详解】子二代基因配型有 6 种情况，分别记为事件 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$，

"子三代基因型为高茎"记为事件 B，则

事件	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
配型	$DD\times DD$	$DD\times Dd$	$DD\times dd$	$Dd\times Dd$	$Dd\times dd$	$dd\times dd$
$P(A_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
$P(B\|A_i)$	1	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0

$P(B)=\sum_{i=1}^{6}P(A_i)P(B|A_i)=1\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{16}=\frac{3}{4}$，

故选：C

10．（22-23 高二下·山东聊城·期末）托马斯·贝叶斯（ThomasBayes）在研究"逆向概率"的问题中得到了一个公式：$P\left(A_i|B\right)=\frac{P\left(A_i\right)P\left(B|A_i\right)}{\sum_{n}^{j=1}P\left(A_j\right)P\left(B|A_j\right)}$，这个公式被称为贝叶斯公式（贝叶斯定理），其中 $\sum_{n}^{j=1}P\left(A_j\right)P\left(B|A_j\right)$ 称为 B 的全概率．假设甲袋中有 3 个白球和 2 个红球，乙袋中有 2 个白球和 2 个红球．现从甲袋中任取 2 个球放入乙袋，再从乙袋中任取 2 个球．已知从乙袋中取出的是 2 个白球，则从甲袋中取出的也是 2 个白球的概率为（　　）

A. $\frac{37}{150}$ B. $\frac{9}{75}$ C. $\frac{18}{37}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【分析】根据题意，先分析求解设从甲中取出2个球，其中白球的个数为i个的事件为A_i，事件A_i的概率为$P\left(A_i\right)$，从乙中取出2个球，其中白球的个数为2个的事件为B，事件B的概率为$P\left(B\right)$，再分别分析$i=0,1,2$三种情况求解即可

【详解】设从甲中取出2个球，其中白球的个数为i个的事件为A_i，事件A_i的概率为$P\left(A_i\right)$，从乙中取出2个球，其中白球的个数为2个的事件为B，事件B的概率为$P\left(B\right)$，由题意：

①$P\left(A_0\right)=\frac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，$P\left(B\mid A_0\right)=\frac{C_2^2C_4^0}{C_6^2}=\frac{1}{15}$；

②$P\left(A_1\right)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，$P\left(B\mid A_1\right)=\frac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\frac{1}{5}$；

③$P\left(A_2\right)=\frac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，$P\left(B\mid A_2\right)=\frac{C_4^2C_2^0}{C_6^2}=\frac{2}{5}$；

根据贝叶斯公式可得，从乙袋中取出的是2个红球，则从甲袋中取出的也是2个红球的概率为

$$P\left(A_2\mid B\right)=\frac{P\left(A_2\right)P\left(B\mid A_2\right)}{P\left(A_0\right)P\left(B\mid A_0\right)+P\left(A_1\right)P\left(B\mid A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B\mid A_2\right)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{10}\times\frac{1}{15}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}}=\frac{6}{1+9+6}=\frac{18}{37}$$

故选：C

11．（22-23高二下·广东广州·期末）随着广州的城市生态环境越来越好，越来越多的家庭选择市区景点轻松度周末.现有两个家庭，他们分别从“南沙海滨公园”、“白云山”、“海珠湿地公园”、“大夫山森林公园”、“火炉山森林公园”这5个户外景点中随机选择1个景点度周末.记事件A为“两个家庭中至少有一个家庭选择白云山”，事件B为“两个家庭选择的景点不同”，则$P\left(B\mid A\right)=$（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{7}{8}$　　C．$\frac{8}{9}$　　D．$\frac{9}{10}$

【答案】C

【分析】根据给定条件，求出事件A,AB所含有的基本事件数，再利用条件概率公式计算作答.

【详解】两个家庭选择景点的试验有5^2个基本事件，事件A含有的基本事件数为$C_2^1C_4^1+C_2^2$个，

事件AB含有的基本事件数为$C_2^1C_4^1$个，则$P(A)=\frac{C_2^1C_4^1+C_2^2}{5^2}=\frac{9}{25},P(AB)=\frac{C_2^1C_4^1}{5^2}=\frac{8}{25}$，

所以$P\left(B\mid A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{8}{9}$.

故选：C

12．（22-23 高二下·福建泉州·期末）“杂交水稻之父”袁隆平一生致力于杂交水稻技术的研究、应用与推广，发明了“三系法”籼型杂交水稻，成功研究出“两系法”杂交水稻，创建了超级杂交稻技术体系，为我国粮食安全，农业科学发展和世界粮食供给做出了杰出贡献·某杂交水稻种植研究所调查某地水稻的株高，得出株高（单位：cm）服从正态分布，其密度曲线函数为 $f(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-100)^2}{200}}$，$x\in\mathbf{R}$，则下列说法错误的是（　）

A．该地水稻的平均株高为100cm

B．该地水稻株高的方差为 100

C．随机测量一株水稻，其株高在 120cm 以上的概率比株高在 70cm 以下的概率小

D．随机测量一株水稻，其株高在 $(90,100)$ 和在 $(100,110)$（单位：cm）的概率一样大

【答案】C

【分析】根据密度曲线求得 μ,σ，然后对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】依题意 $\mu=100,\sigma=10$，

所以平均数为100cm，方差为 $\sigma^2=100$，所以 AB 选项正确.

依题意 $P(X\geq 100+20)=P(X\leq 100-20),P(X\geq 120)=P(X\leq 80)$，

而 $P(X\leq 80)>P(X\leq 70)$，即 $P(X\geq 120)>P(X\leq 70)$，所以 C 选项错误.

$P(100-10<X<100)=P(100<X<100+10),P(90<X<100)=P(100<X<110)$，所以 D 选项正确.

故选：C

13．（22-23 高二下·重庆·期末）一个盒子里装有 6 个小球，其中 4 个是黑球，2 个是白球，现依次一个一个地往外取球（不放回），记事件 A_k 表示“第 k 次取出的球是黑球”，$k=1,2,\cdots,6$，则不正确的是（　）

A．$P(A_3)=\frac{2}{3}$　　B．$P(A_1A_2)=\frac{2}{5}$　　C．$P(A_2|A_1)=\frac{1}{3}$　　D．$P(A_5+A_6)=\frac{14}{15}$

【答案】C

【分析】利用古典概型的概率公式及条件概率的概率公式计算可得；

【详解】对于 A：事件 A_3 表示“第 3 次取出的球是黑球”，则 $P(A_3)=\frac{C_4^1\cdot A_5^5}{A_6^6}=\frac{2}{3}$，所以 A 正确；

对于 B：事件 A_1A_2 表示“第1，2 次取出的球都是黑球”，则 $P(A_1A_2)=\frac{A_4^2}{A_6^2}=\frac{2}{5}$，所以 B 正确；

对于 C：$P\left(A_2|A_1\right)=\dfrac{P\left(A_1A_2\right)}{P\left(A_1\right)}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{6}}=\dfrac{3}{5}$，所以 C 错误，

对于 D：$P\left(A_5\right)=\dfrac{C_4^1\cdot A_5^5}{A_6^6}=\dfrac{2}{3}$，$P\left(A_6\right)=\dfrac{C_4^1\cdot A_5^5}{A_6^6}=\dfrac{2}{3}$，$P\left(A_5A_6\right)=\dfrac{A_4^2A_4^4}{A_6^6}=\dfrac{2}{5}$，

所以 $P\left(A_5+A_6\right)=P\left(A_5\right)+P\left(A_6\right)-P\left(A_5A_6\right)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{14}{15}$，故 D 正确.

故选：C.

14.（22-23 高二下·浙江温州·期末）冬季两项是冬奥会的项目之一，是把越野滑雪和射击两种不同特点的竞赛项目结合在一起进行的运动，其中冬季两项男子个人赛，选手需要携带枪支和 20 发子弹，每滑行 4 千米射击一轮，共射击 4 轮，每轮射击 5 次，若每有 1 发子弹没命中，则被罚时 1 分钟，总用时最少者获胜.已知某男选手在一次比赛中共被罚时 3 分钟，假设其射击时每发子弹命中的概率都相同，且每发子弹是否命中相互独立，记事件 A 为其在前两轮射击中没有被罚时，事件 B 为其在第 4 轮射击中被罚时 2 分钟，那么 $P\left(A|B\right)=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　　B．$\frac{1}{4}$　　　C．$\frac{1}{3}$　　　D．$\frac{3}{8}$

【答案】C

【分析】事件 B 为前 3 轮中有一轮中有 1 发未中，第 4 轮射击中有 2 发未中，事件 AB 是第 3 轮有 1 发未中，第 4 轮有 2 发未中，然后利用利用条件概率求解.

【详解】由题意得 $P(B)=\dfrac{C_3^1C_5^1C_5^2}{C_{20}^3}, P(AB)=\dfrac{C_5^1C_5^2}{C_{20}^3}$，

$\therefore P\left(A|B\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}=\dfrac{C_5^1C_5^2}{C_{20}^3}\div\dfrac{C_3^1C_5^1C_5^2}{C_{20}^3}=\dfrac{1}{3}$，所以 C 正确.

故选：C

15.（22-23 高二下·辽宁·期末）已知某疾病的某种疗法治愈率为 80%.若有 100 位该病患者采取了这种疗法，且每位患者治愈与否相互独立，设其中被治愈的人数为 X，则下列选项中正确的是（　）

A．$E(2X+1)=160$　　　B．$P(X=30)=C_{100}^{30}(0.8)^{30}(0.2)^{70}$

C．$D(2X+1)=32$　　　D．存在 $k\neq 50$，使得 $P(X=k)=P(X=100-k)$ 成立

【答案】B

【分析】

根据二项分布的概率公式、期望与方差公式及期望与方差的性质计算即可逐一判定.

【详解】由题意可得 $X\sim B(100,0.8)$，

则 $E(X)=100\times0.8=80, D(X)=100\times0.8\times(1-0.8)=16$，

所以 $E(2X+1)=2E(X)+1=161$， $D(2X+1)=4D(X)=64$， 故 AC 错误；

由二项分布的概率公式得 $P(X=30)=\mathrm{C}_{100}^{30}(0.8)^{30}(0.2)^{70}$， 故 B 正确；

$P(X=k)=\mathrm{C}_{100}^{k}\cdot(0.8)^{k}\cdot(0.2)^{100-k}, P(X=100-k)=\mathrm{C}_{100}^{100-k}\cdot(0.8)^{100-k}\cdot(0.2)^{k}$，

若 $P(X=k)=P(X=100-k)$，

则 $\mathrm{C}_{100}^{k}\cdot(0.8)^{k}\cdot(0.2)^{100-k}=\mathrm{C}_{100}^{100-k}\cdot(0.8)^{100-k}\cdot(0.2)^{k}$，

化简得 $(0.8)^{2k-100}=(0.2)^{2k-100}$， 解得 $k=50$， 与条件矛盾，即 D 错误.

故选：B.

16．（22-23 高二下·山东聊城·期末） 今年 2 月份教育部教育考试院给即将使用新高考卷的吉林、黑龙江、安徽、云南命制了一套四省联考题，测试的目的是教考衔接，平稳过渡．假如某市有 40000 名考生参加了这次考试，其数学成绩 X 服从正态分布，总体密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-65)^2}{2\sigma^2}}$， 且 $P(40\le X\le90)=0.9$， 则该市这次考试数学成绩超过 90 分的考生人数约为（　　）

A．4000　　B．3000　　C．2000　　D．1000

【答案】C

【分析】由对称性计算概率，进而得出所求人数.

【详解】由总体密度函数解析式可知， $\mu=65$，

由对称性可知， $P(X>90)=0.5-\frac{1}{2}P(40\le X\le90)=0.05$，

则该市这次考试数学成绩超过 90 分的考生人数约为 $0.05\times40000=2000$ 人.

故选：C

17．（22-23 高二下·江苏镇江·期末） 下列说法中正确的是（　　）

①若随机变量 $X\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$， 则 $P(X=3)=\frac{5}{16}$

②若随机变量 $Y\sim N(2,\sigma^2)$ 且 $P(Y<4)=0.9$， 则 $P(0<Y<2)=0.4$

③甲、乙、丙、丁四人到四个景点旅游，每人只去一个景点，设事件 $A=$ “4 个人去的景点互不相同”，事

件 $B=$ “甲独自去一个景点”，则 $P\left(A|B\right)=\frac{2}{9}$

④设随机变量 X，则 $E\left(3X+1\right)=3E\left(X\right)+1$，$D\left(3X+1\right)=3D\left(X\right)+1$

A. ①②③　　B. ②③④　　C. ②③　　D. ①②

【答案】A

【分析】利用二项分布的概率公式计算判断①；利用正态分布的对称性计算判断②；利用条件概率公式计算判断③；利用期望、方差的性质判断④作答.

【详解】对于①，$X\sim B(6,\frac{1}{2})$，则 $P(X=3)=C_6^3(\frac{1}{2})^3(1-\frac{1}{2})^3=\frac{5}{16}$，①正确；

对于②，$Y\sim N\left(2,\sigma^2\right)$ 且 $P\left(Y<4\right)=0.9$，则 $P\left(0<Y<2\right)=P\left(2<Y<4\right)=0.9-0.5=0.4$，②正确；

对于③，依题意，$P(B)=\frac{C_4^1\cdot 3^3}{4^4},P(AB)=P(A)=\frac{A_4^4}{4^4}$，所以 $P\left(A|B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{24}{108}=\frac{2}{9}$，③正确；

对于④，$E\left(3X+1\right)=3E\left(X\right)+1$，$D\left(3X+1\right)=9D\left(X\right)$，④错误，

所以说法正确的序号是①②③.

故选：A

18.（22-23 高二下·重庆渝中·期末）已知有甲乙两个盒子.盒中装有大小.形状完全相同的小球.甲盒中装有 3 个红球和 2 个白球，乙盒中装有 2 个红球、1 个白球.现在从甲盒中摸出 2 个小球放入乙盒中，再从乙盒中摸出 2 个小球，则这 2 个小球为红球的概率为（　）

A. $\frac{7}{20}$　　B. $\frac{9}{25}$　　C. $\frac{37}{100}$　　D. $\frac{19}{50}$

【答案】C

【分析】由全概率公式求解即可

【详解】记“从甲盒中取出 2 个红球”为事件 C_1，“从甲盒中取出 2 个白球”为事件 C_2，

“从甲盒中取出 1 个红球和 1 个白球”为事件 C_3，“从乙盒中取出的 2 个球均为红球”为事件 D，

显然，事件 C_1，C_2，C_3 两两互斥，且 $C_1+C_2+C_3$ 正好为“从甲盒中任取 2 个球”的样本空间 Ω，

由全概率公式得 $P\left(D\right)=\sum_{3}^{i=1}P\left(C_i\right)P\left(D|C_i\right)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_4^2}{C_5^2}+\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{37}{100}$,

从甲盒中摸出 2 个小球放入乙盒中，再从乙盒中摸出 2 个小球，则这 2 个小球为红球的概率为 $\frac{37}{100}$.

故选：C

二、多选题

19.（22-23 高二下·福建厦门·期末） 设 A、B 是随机试验的两个事件，$P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(A\cup B)=\frac{11}{12}$，则（　）

A．事件 A 与事件 B 互斥　　　B．事件 A 与事件 B 相互独立

C．$P(A|B)=\frac{2}{3}$　　　D．$P(\overline{AB})=\frac{1}{2}$

【答案】BCD

【分析】由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，可得 $P(AB)$，从而可判断 A，B；由条件概率计算可判断 C；由对立事件的概率计算可判断 D.

【详解】因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

所以 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{11}{12}=\frac{1}{2}$，故 A 错误；

因为 $P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}=P(AB)$，所以事件 A 与事件 B 相互独立，故 B 正确；

因为 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$，故 C 正确；

因为 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故 D 正确.

故选：BCD

20.（22-23 高二下·河北保定·期末） 2022 年 9 月 19 日，航天科技集团五院发布消息称，在法国巴黎召开的第 73 届国际宇航大会上，我国首次火星探测天问一号任务团队获得国际宇航联合会 2022 年度世界航天奖，为科普航天知识，某校组织学生参与航天知识竞赛活动，竞赛规则：从 10 道选题中随机抽取 3 道题作答，全部答对即可获奖．甲、乙两位同学参加知识竞赛，已知甲同学 10 道选题中只有 2 道题不会，乙同学每道选题答对的概率都为 $\frac{4}{5}$．若甲、乙两位同学回答正确的题的个数的期望分别为 $E(X),E(Y)$，方差分别为 $D(X),D(Y)$，则（　）

A．$E(X)=E(Y)$　　　B．$E(X)<E(Y)$

C．$D(X)=D(Y)$　　　D．$D(X)<D(Y)$

【答案】AD

【分析】根据题意，得到随机变量 X 可能取值，求得相应的概率，得出期望和方差，再由 $Y\sim B\left(3,\frac{4}{5}\right)$，根

据二项分布的期望和方差的公式，求得期望和方差，结合选项，即可求解.

【详解】由题意得，随机变量 X 可能取值为 $1,2,3$，

则 $P(X=1)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15},P(X=2)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},P(X=3)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$，

所以 $E(X)=\frac{1+14+21}{15}=\frac{12}{5}$，

$D(X)=\left(1-\frac{12}{5}\right)^2\times\frac{1}{15}+\left(2-\frac{12}{5}\right)^2\times\frac{7}{15}+\left(3-\frac{12}{5}\right)^2\times\frac{7}{15}=\frac{28}{75}$，

因为 $Y\sim B\left(3,\frac{4}{5}\right)$，所以 $E(Y)=\frac{12}{5},D(Y)=3\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{12}{25}$，

所以 $E(X)=E(Y)$，$D(X)<D(Y)$.

故选：AD.

21．（22-23 高二下·海南·期末）某小学六年级有 3 个班，六（1）班、六（2）班、六（3）班的学生人数之比为 3∶3∶4.在某次数学考试中，六（1）班的不及格率为 10%，六（2）班的不及格率为 20%，六（3）班的不及格率为 15%，从该校随机抽取一名六年级学生.记事件 $A=$“该学生本次数学考试不及格”，事件 $B_i=$“该学生在六（i）班”（$i=1$，2，3），则（　）

A．$P(B_i)=0.3$

B．$P(A)=0.15$

C．A 与 B_i（$i=1$，2，3）均不相互独立

D．$\frac{P(B_1|A)}{P(B_3|A)}=\frac{1}{2}$

【答案】BD

【分析】对于 A，利用古典概型的概率计算公式，可得答案；

对于 B，根据全概率公式，可得答案；

对于 C，根据独立事件的概率乘法公式，可得答案；

对于 D，根据条件概率公式的计算公式，可得答案.

【详解】对于 A，$P(B_1)=\frac{3}{3+3+4}=30\%$，$P(B_2)=\frac{3}{3+3+4}=30\%$，$P(A|B_3)=\frac{4}{3+3+4}=40\%$，故 A 错误；

对于 B，由题意，$P(A|B_1)=10\%$，$P(A|B_2)=20\%$，$P(A|B_3)=15\%$，

$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=0.15$，故 B 正确；

对于 C，由 $P(A)=P(A|B_3)=0.15$，则 $P(AB_3)=P(A|B_3)P(B_3)=P(A)P(B_3)$，

即 A 与 B_3 相互独立，故 C 错误；

对于 D，$P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$，$P(B_3|A)=\dfrac{P(AB_3)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=\dfrac{2}{5}$，

则 $\dfrac{P(B_1|A)}{P(B_3|A)}=\dfrac{1}{2}$，故 D 正确.

故选：BD.

22．（22-23 高二下·福建莆田·期末）甲、乙两个罐子均装有 2 个红球，1 个白球和 1 个黑球，除颜色外，各个球完全相同.先从甲罐中随机取出 2 个球放入乙罐中，再从乙罐中随机取出 1 个球，记事件 $A_i(i=0,1,2)$ 表示从甲罐中取出的 2 个球中含有 i 个红球，B 表示从乙罐中取出的球是红球，则（　）

A．A_0，A_1，A_2 两两互斥　　B．$P(B|A_2)=\dfrac{1}{3}$

C．$P(B)=\dfrac{1}{2}$　　D．B 与 A_1 不相互独立

【答案】AC

【分析】结合互斥，相互独立事件的定义，以及全概率公式，条件概率公式，即可判断选项.

【详解】A. A_0 表示从甲罐中取出的 2 个球，没有红球，A_1 表示从甲罐中取出的 2 个球，有 1 个红球，A_2 表示从甲罐中取出的 2 个球，有 2 个红球，在一次实验中，这三个事件，任两个事件不能同时发生，所以两两互斥，故 A 正确；

B. $P(B|A_2)=\dfrac{P(A_2B)}{P(A_2)}=\dfrac{\dfrac{C_2^2}{C_4^2}\times\dfrac{C_4^1}{C_6^1}}{\dfrac{C_2^2}{C_4^2}}=\dfrac{2}{3}$，故 B 错误；

C. $P(B)=P(B|A_0)\times P(A_0)+P(B|A_1)\times P(A_1)+P(B|A_2)\times P(A_2)$

$=\dfrac{C_2^1}{C_6^1}\times\dfrac{C_2^2}{C_4^2}+\dfrac{C_3^1}{C_6^1}\times\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}+\dfrac{C_4^1}{C_6^1}\times\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{2}$，故 C 正确；

D. $P(A_1)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{2}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(A_1B)=\dfrac{C_2^1C_2^1C_3^1}{C_4^2C_6^1}=\dfrac{1}{3}$，

则 $P(A_1B)=P(A_1)P(B)$，则 B 与 A_1 相互独立，故 D 错误.

故选：AC

23.（22-23 高二下·广东江门·期末）已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2,4)$，则（　）

A．$P(X \le 3) > \frac{1}{2}$　　B．$P(1 \le X \le \frac{3}{2}) = P(\frac{5}{2} \le X \le 3)$

C．$P(0 \le X \le \frac{3}{2}) = P(1 \le X \le \frac{5}{2})$　　D．X 的方差为 2

【答案】AB

【分析】根据题意得出 $\mu = 2, \sigma = 2$，结合正态分布的对称性，对各选项逐项判定，即可求出结果.

【详解】因为随机变量 X 服从正态分布 $N(2,4)$，有 $\mu = 2, \sigma = 2$，则随机变量 X 所对正态曲线关于 $x=2$ 对称，

于是 $P(X \le 2) = \frac{1}{2}$，$P(X \le 3) = P(X \le 2) + P(2 < X \le 3) > P(X \le 2) = \frac{1}{2}$，A 正确；

显然 $[1,\frac{3}{2}]$ 和 $[\frac{5}{2},3]$ 关于 $x=2$ 对称，而 $[0,\frac{3}{2}]$ 和 $[1,\frac{5}{2}]$ 关于 $x=2$ 不对称，

因此 $P(1 \le X \le \frac{3}{2}) = P(\frac{5}{2} \le X \le 3)$，$P(0 \le X \le \frac{3}{2}) \ne P(1 \le X \le \frac{5}{2})$，B 正确，C 错误；

显然 X 的方差为 4，D 错误.

故选：AB

24.（22-23 高二下·福建南平·期末）设 A，B 为一个随机试验中的两个随机事件，若 $P(A) = \frac{2}{5}$，$P(\overline{B}|A) = \frac{3}{4}$，$P(B|\overline{A}) = \frac{1}{3}$，则（　）

A．$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{1}{2}$　　B．$P(\overline{A}B) = \frac{1}{5}$　　C．$P(B) = \frac{3}{10}$　　D．$P(A|B) = \frac{1}{3}$

【答案】BCD

【分析】由条件 $P(B|\overline{A}) = \frac{1}{3}$，结合条件概率性质判断 A，由条件结合条件概率公式可求 $P(\overline{A}B)$，判断 B，结合全概率公式判断 C；利用条件概率公式先求 $P(AB)$，再求 $P(A|B)$，判断 D.

【详解】因为 $P(B|\overline{A}) = \frac{1}{3}$，又 $P(B|\overline{A}) + P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$，所以 $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{2}{3}$，A 错误；

因为 $P(A) = \frac{2}{5}$，所以 $P(\overline{A}) = \frac{3}{5}$，又 $P(B|\overline{A}) = \frac{1}{3}$，所以 $\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{1}{3}$，所以 $P(\overline{A}B) = \frac{1}{5}$，B 正确；

因为 $P(\overline{B}|A) = \frac{3}{4}$，所以 $P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A) = \frac{1}{4}$，

因为 $P(B) = P(AB + \overline{A}B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$，C 正确；

因为$P(B|A)=\frac{1}{4}$，$P(A)=\frac{2}{5}$，所以$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{10}$，所以$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$，D 正确；

故选：BCD.

25.（22-23 高二下·湖北·期末）已知随机变量$X\sim B(10,p)$，随机变量$Y\sim B(10,1-p)$，$p\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，则下列说法正确的有（　）

A．$p=\frac{1}{2}$时，$P(X\le 1)=\frac{5}{512}$

B．$D(X)+D(Y)$的最大值为 5

C．$p=\frac{1}{2}$时，$P(X=k)$取最大值时$k=5$

D．$\left[P(X=k-1)-P(Y=k-1)\right](k-6)\le 0$

【答案】BCD

【分析】A 选项，利用二项分布的概率公式求概率即可判断；B 选项，利用二项分布的方差公式计算，结合基本不等式可求出最值；C 选项，求出$x=k$时的概率，结合二项式系数的性质可求出概率最大时k的值；D 选项，计算$P(X=k-1)-P(Y=k-1)$，分别讨论$\boldsymbol{k<6}$，$k>6$以及$k=6$时的正负，即可判断结果.

【详解】A 选项：当$p=\frac{1}{2}$时，$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\mathrm{C}_{10}^{0}(1-p)^{10}+\mathrm{C}_{10}^{1}p(1-p)^{9}=\frac{11}{1024}$，故 A 错误；

B 选项：$D(X)+D(Y)=20p(1-p)\le 20\times\left[\frac{p+(1-p)}{2}\right]^{2}=5$，当且仅当$p=\frac{1}{2}$时，等号成立，故 B 正确；

C 选项：$p=\frac{1}{2}$时，$P(X=k)=\mathrm{C}_{10}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}=\frac{\mathrm{C}_{10}^{k}}{1024}$，由二项式系数的性质可知当$k=5$时，$P(X=k)$取得最大值；

D 选项：$P(X=k-1)-P(Y=k-1)=\mathrm{C}_{10}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{11-k}-\mathrm{C}_{10}^{k-1}(1-p)^{k-1}p^{11-k}$

当$\boldsymbol{k<6}$时，$P(X=k-1)-P(Y=k-1)=\mathrm{C}_{10}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{k-1}\left[(1-p)^{12-k}-p^{12-k}\right]$，因为$p\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，所以$(1-p)^{12-k}-p^{12-k}>0$，则$\left[P(X=k-1)-P(Y=k-1)\right](k-6)<0$；

当$k>6$时，$P(X=k-1)-P(Y=k-1)=\mathrm{C}_{10}^{k-1}p^{11-k}(1-p)^{11-k}\left[p^{2k-12}-(1-p)^{2k-12}\right]$，因为$p\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，所以$p^{2k-12}-(1-p)^{2k-12}<0$，所以$\left[P(X=k-1)-P(Y=k-1)\right](k-6)<0$；