安徽省合肥市第一中学 2024-2025 学年高三上学期第四次素质拓展数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

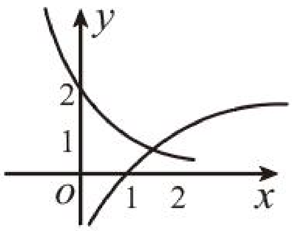
一、单选题

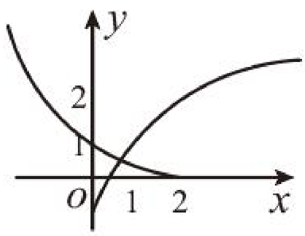
1．设集合$U=\mathbf{R}$，集合$M=\{x\mid x^2-2x\geq 0\},N=\{x\mid y=\log_2(1-x)\}$，则$\{x\mid x<2\}=$（　）

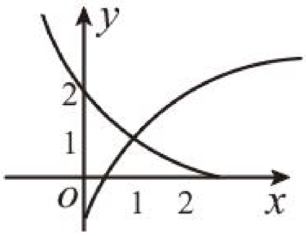
A．$M\cup N$　　　　B．$N\cup(\complement_U M)$

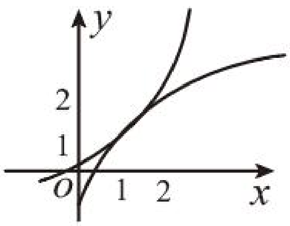
C．$M\cup(\complement_U N)$　　　　D．$\complement_U(M\cap N)$

2．函数$f(x)=1+\log_2 x$与$g(x)=2^{-x+1}$在同一直角坐标系下的图象大致是（　　）

A．

B．

C．

D．

3．已知△ABC满足$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，则△$ABC$是（　　）

A．等边三角形　　　　B．锐角三角形

C．直角三角形　　　　D．钝角三角形

4．已知直线$y=kx+1$与曲线$y=x^3+ax+b$切于点$(1,3)$，则b的值为（　）

A．3　　B．-3　　C．5　　D．-5

5．下列叙述中正确的个数是：（　）

①若$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为平面向量，则$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$；

②向量$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$与$\vec{a}$垂直；

③$\vec{a}=(-3,m)$，$\vec{b}=(4,3)$，若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是钝角，则实数m的取值范围是$m<4$

④.记$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{e}$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量为$(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}$

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

6．若一元二次不等式$a_1x^2+b_1x+c_1>0$，$a_2x^2+b_2x+c_2<0$的解集分别为M、N，a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2均不为0，M、N既不是$\mathbf{R}$也不是$\varnothing$，则"$M=N$"是"$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$"的（　）条件

A．充分不必要　　B．必要不充分

C．充要　　D．既不充分也不必要

7．已知$\omega>0$，函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上单调递减，则$\omega$的取值范围是（ ）

A．$[\frac{1}{2},\frac{5}{4}]$　　B．$[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$　　C．$(0,\frac{1}{2}]$　　D．$(0,2]$

8．定义域在R上的奇函数$f(x)=\frac{-2^x+a}{2^{x+1}+2}$.若存在$\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$，使得$f\left(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right)+f\left(k-\cos^2\theta\right)>0$成立，则实数$k$的取值范围为（　）.

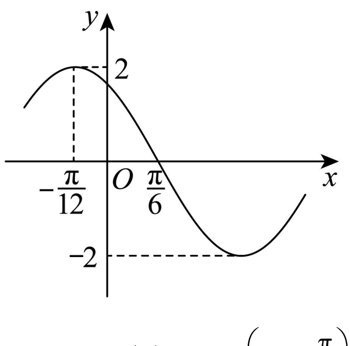
A．$(2,+\infty)$　　B．$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$　　C．$(-\infty,2)$　　D．$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

二、多选题

9．已知 $\log_2 a>\log_2 b$，则下列不等式一定成立的有（　）

A．$a^2>b^2$　　B．$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　C．$a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}$　　D．$(a+1)^b>(b+1)^a$

10．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象如图所示，则（　）



A．$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

B．函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{7\pi}{12}$ 对称

C．函数 $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称

D．函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递增

11．已知实数 x，y 满足 $e^{x+y}+\frac{y}{x}=0$，则（　）

A．当 $y<0$ 时，$x+y=0$

B．当 $x<0$ 时，$x+y=0$

C．当 $x+y\neq 0$ 时，$y-x>2$

D．当 $x+y\neq 0$ 时，$-1<xy<0$

三、填空题

12．已知 α 是三角形的内角，若 $\cos^2\alpha=\cos 2\alpha-\sin 2\alpha$，则 $\tan\alpha=$________.

13．已知函数 $f(x)=x(x+a)^2$ 在 $x=1$ 处有极小值，则实数 $a=$______.

14．圆 O_1 与圆 O_2 半径分别为 1 和 2，两圆外切于点 P，点 A，B 分别为圆 O_1,O_2 上的动点，$\angle APB=120°$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为___________.

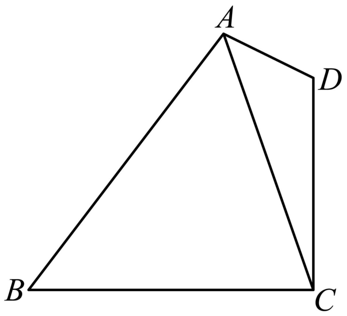
四、解答题

15．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的最小值，及 $f\left(x\right)$ 取最小值时的 x 的值；

(2)将函数 $f\left(x\right)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，若 $g\left(\alpha\right)=-\frac{6}{5}$，且 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right)$，求 $\cos 2\alpha$ 的值.

16．在平面四边形 $ABCD$ 中，$BC\perp CD, AC=\sqrt{3}, AD=1, \angle ACD=30°$.



(1)求 CD 的长；

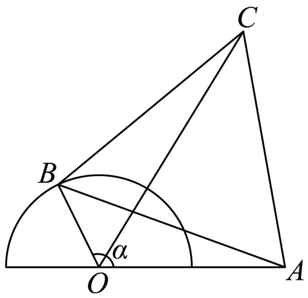
(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 BC 的取值范围.

17．已知函数 $f\left(x\right)=a\ln\left(x+1\right)-x$

(1)讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)<\left(a-1\right)\ln a+a^{2}$.

18．如图，半圆 O 的直径为 4cm，A为直径延长线上的点，$OA=4\text{cm}$，B 为半圆上任意一点，以 AB 为一边作等边三角形 ABC .设 $\angle AOB=\alpha$.



(1)问：B 在什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大，并求出面积的最大值.

(2)克罗狄斯·托勒密（Ptolemy）所著的《天文集》中讲述了制作弦表的原理，其中涉及如下定理：任意凸四边形中，两条对角线的乘积小于或等于两组对边乘积之和，当且仅当对角互补时取等号，根据以上材料，则当线段 OC 的长取最大值时，求 $\angle AOC$.

(3)求 $\triangle AOC$ 面积的最大值.

19．意大利画家达·芬奇提出：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，那么项链所形成的曲线是什么?这就是著名的“悬链线问题”，通过适当建立坐标系，悬链线可为双曲余弦函数 $\text{ch}\left(x\right)=\dfrac{\text{e}^{x}+\text{e}^{-x}}{2}$ 的图象，定义双曲正弦函数 $\text{sh}\left(x\right)=\dfrac{\text{e}^{x}-\text{e}^{-x}}{2}$，类比三角函数的性质可得双曲正弦函数和双曲余弦函数有如下性质①平方关系：$\text{ch}^{2}\left(x\right)-\text{sh}^{2}\left(x\right)=1$，②倍元关系：$\text{sh}\left(2x\right)=2\text{sh}\left(x\right)\cdot\text{ch}\left(x\right)$.

(1)求曲线 $\text{ch}\left(x\right)$ 在 $x=2$ 处的切线斜率；

(2)若对任意 $x>0$，都有 $\left(x-a-1\right)\left(\text{sh}\left(x\right)+\text{ch}\left(x\right)\right)\geq 2\sin x-2\left(x-a\right)\cos x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(3)（i）证明：当 $x>0$ 时，$\text{sh}\left(x\right)>x$；

（ii）证明：$\dfrac{\mathrm{sh}(2)}{\tan 1}+\dfrac{\mathrm{sh}(1)}{\tan\frac{1}{2}}+\dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{2}{3}\right)}{\tan\frac{1}{3}}+\cdots+\dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{2}{n}\right)}{\tan\frac{1}{n}}>2n-\dfrac{4n}{2n+1}\left(n\in\mathbf{N}^{*}\right)$.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	C	A	C	A	A	D	AB	ACD
题号	11									
答案	ACD									

1．B

【分析】化简集合M,N，根据集合的交集、并集、补集求解.

【详解】因为$M=\{x\mid x^2-2x\geq 0\}=(-\infty,0]\cup[2,+\infty),N=\{x\mid y=\log_2(-x)\}=(-\infty,1)$，

所以$M\cup N=(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$， $N\cup\left(\complement_U M\right)=(-\infty,1)\cup(0,2)=(-\infty,2)=\{x\mid x<2\}$，

$M\quad(\complement_U N)=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)\cup[1,+\infty)=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，

因为$M\cap N=(-\infty,0]$，所以$\complement_U\left(M\cap N\right)=(0,+\infty)$，

故选：B

2．C

【详解】根据函数$f(x)=1+\log_2 x$过$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$排除 A;

根据$g(x)=2^{-x+1}$过$(0,2)$排除 B、D,

故选 C.

3．C

【分析】由数量积的运算律化简后得出正确选项

【详解】由题意得$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，故$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

$\therefore C=90^\circ$，$\triangle ABC$是直角三角形

故选：C

4．A

【分析】因为$(1,3)$是直线与曲线的交点,所以把$(1,3)$代入直线方程即可求出斜率k的值,然后利用求导法则求出曲线方程的导函数,把切点的横坐标$x=1$代入导函数中得到切线的斜率,让斜率等于k列出关于a的方程,求出方程的解得到a的值,然后把切点坐标和a的值代入曲线方程,即可求出b的值.

【详解】把$(1,3)$代入直线$y=kx+1$中,得到$k=2$,

求导得：$y'=3x^2+a$,所以 $y'_{x=1}=3+a=2$,解得 $a=-1$，

把 $(1,3)$ 及 $a=-1$ 代入曲线方程得：$1-1+b=3$，

则 b 的值为 3.

故选：A.

【点睛】此题考查学生会利用导数求曲线上过某点切线方程的斜率,是一道基础题.

5．C

【分析】对①，举反例说明；对②，由两向量垂直的向量关系运算验证；对③，由向量夹角是钝角，则向量数量积小于 0，并挖去共线情况；对④，由投影向量的定义运算判断.

【详解】对于①，如 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,1)$，$\vec{c}=(1,1)$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，

所以 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=0\cdot\vec{c}=\vec{0}$，而 $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})=\vec{a}$，所以 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\neq\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$，故①错误；

对于②，因为 $\vec{a}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\right]=(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$，故②正确；

对于③，由题意，$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，即 $\begin{cases}-12+3m<0\\(-3)\times 3\neq 4m\end{cases}$，解得 $m<4$ 且 $m\neq-\frac{9}{4}$，故③错误；

对于④，由 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{e}$，即 $\vec{b}=|\vec{b}|\vec{e}$，

所以向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot(|\vec{b}|\vec{e})}{|\vec{b}|}\vec{e}=\frac{|\vec{b}|(\vec{a}\cdot\vec{e})}{|\vec{b}|}\vec{e}=(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}$，故④正确.

综上，正确的为②④.

故选：C.

6．A

【分析】通过两个一元二次不等式解集的关系，结合充分、必要条件判断即可.

【详解】若一元二次不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$，$a_2x^2+b_2x+c_2<0$ 的解集分别为 M、N，

a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均不为 0，M、N 既不是 $\mathbf{R}$ 也不是 $\varnothing$，若 $M=N$，则 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，

反之，若 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，则 $M=N$，例如 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=1$，

不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 的解集与不等式 $a_2x^2+b_2x+c_2<0$ 即 $a_1x^2+b_1x+c_1<0$ 的解集不一样，

因此“$M=N$”是“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”的充分不必要条件.

故选：A.

7．A

【详解】由题意可得,$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}<\pi\omega+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

$\therefore\frac{1}{2}+4k\le\omega\le\frac{5}{4}+2k,k\in Z$，

$\because\omega>0$，$\therefore\frac{1}{2}\le\omega\le\frac{5}{4}$．故 A 正确.

考点：三角函数单调性.

8．D

【分析】由$f(0)=0$得$a=1$，由指数函数的性质可得$f(x)$在R上为减函数，利用函数奇偶性转化不等式，结合函数单调性可解决问题.

【详解】$\because f(x)$是定义域在 R 上的奇函数，

$\therefore f(0)=\frac{-2^0+a}{2+2}=0$，解得$a=1$，检验得$a=1$时，$f(x)$是奇函数，

$\therefore f(x)=\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}=-\frac{2^x-1}{2(2^x+1)}=-\frac{2^x+1-2}{2(2^x+1)}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$，

由指数函数的性质可得$f(x)$在 R 上为减函数.

由$f(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)+f(k-\cos^2\theta)>0$得$f(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)>-f(k-\cos^2\theta)=f(-k+\cos^2\theta)$，

$\therefore\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta<-k+\cos^2\theta$，即存在$\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$，使得$k<\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$，

记$g(\theta)=\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$，则$k<g(\theta)_{\max}$，

$g(\theta)=\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta=\frac{1}{2}-\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\because\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$，$\therefore 2\theta-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$，

$\therefore\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$，$\therefore g(\theta)_{\max}=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$，

$\therefore k<\frac{3}{2}$，即实数k的取值范围为$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.

故选：D.

9．AB

【分析】选项 A，由不等式的性质可得；选项 B，利用基本不等式可证明；选项 CD，举反例可知.

【详解】由 $\log_2 a > \log_2 b$ ，得 $a > b > 0$ ，

则 $a^2 > b^2$，故 A 正确；

选项 B，因为 $\frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0$ ，

由基本不等式可得 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$ ，

由 $a \neq b$ ，等号取不到，则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ ，故 B 正确；

选项 C，当 $a = 1, b = \frac{1}{2}$ 时，则 $a - \frac{1}{b} = -1, b - \frac{1}{a} = -\frac{1}{2}$ ，

此时 $a - \frac{1}{b} < b - \frac{1}{a}$ ，故 C 错误；

选项 D，当 $a = 2, b = 1$ 时， $(a+1)^b = 3, (b+1)^2 = 2^2 = 4$，

此时 $\left(a+1\right)^b < \left(b+1\right)^a$ ，故 D 错误.

故选：AB.

10．ACD

【分析】根据图像求出 $f\left(x\right) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$，然后利用三角函数的性质逐一判断即可.

【详解】由图可知： $A = 2$，

且 $\frac{1}{4}T = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4}$,故 $T = \pi$， $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，

$\therefore f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \varphi\right) = 2$ ，

故 $\therefore -\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$ ，

$\because 0 < \varphi < \pi, \therefore \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ，

$\therefore f\left(x\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$，故 A 正确；

当 $x = \frac{7\pi}{12}$ 时， $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} \neq k\pi, k \in \mathrm{Z}$ ，故 B 错误；

当 $x = -\frac{\pi}{3}$ 时， $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$ ，故 C 正确；