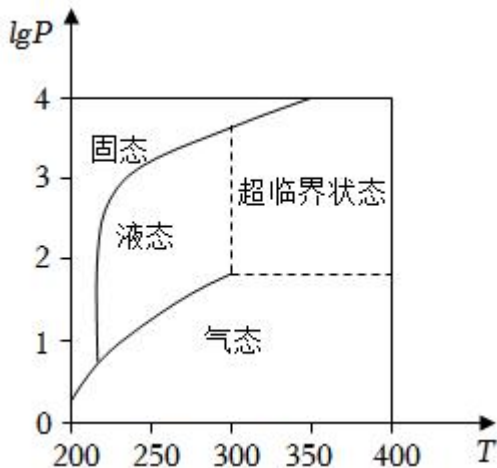


2022 年北京市高考数学试卷

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = \{x | -3 < x < 3\}$ ，集合 $A = \{x | -2 < x, 1\}$ ，则 $\complement_U A =$ ()
 A. $(-2, 1]$ B. $(-3, -2) \cup [1, 3)$ C. $[-2, 1)$ D. $(-3, -2] \cup (1, 3)$
2. 若复数 z 满足 $i \cdot z = 3 - 4i$ ，则 $|z| =$ ()
 A. 1 B. 5 C. 7 D. 25
3. 若直线 $2x + y - 1 = 0$ 是圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 的一条对称轴，则 $a =$ ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1
4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+2^x}$ ，则对任意实数 x ，有 ()
 A. $f(-x) + f(x) = 0$ B. $f(-x) - f(x) = 0$
 C. $f(-x) + f(x) = 1$ D. $f(-x) - f(x) = \frac{1}{3}$
5. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ，则 ()
 A. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ 上单调递减
 B. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12})$ 上单调递增
 C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递减
 D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调递增
6. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的无穷等差数列，则“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 ，当 $n > N_0$ 时， $a_n > 0$ ”的 ()
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献。如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系，其中 T 表示温度，单位是 K ； P 表示压强，单位是 bar 。下列结论中正确的是 ()



- A . 当 $T = 220$, $P = 1026$ 时 , 二氧化碳处于液态
 B . 当 $T = 270$, $P = 128$ 时 , 二氧化碳处于气态
 C . 当 $T = 300$, $P = 9987$ 时 , 二氧化碳处于超临界状态
 D . 当 $T = 360$, $P = 729$ 时 , 二氧化碳处于超临界状态
- 8 . 若 $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 = (\quad)$
 A . 40 B . 41 C . -40 D . -41
- 9 . 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6 , S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合 . 设集合 $T = \{Q \in S \mid PQ \leq 5\}$, 则 T 表示的区域的面积为 (\quad)
 A . $\frac{3\pi}{4}$ B . π C . 2π D . 3π
- 10 . 在 $\triangle ABC$ 中 , $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点 , 且 $PC = 1$, 则 $PA \cdot PB$ 的取值范围是 (\quad)
 A . $[-5, 3]$ B . $[-3, 5]$ C . $[-6, 4]$ D . $[-4, 6]$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

- 11 . (5 分) 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 12 . (5 分) 已知双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 13 . (5 分) 若函数 $f(x) = A \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$; $f(\frac{\pi}{12}) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 14 . (5 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax + 1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值 , 则 a 的一个取值为 $\underline{\hspace{2cm}}$; a 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15 . (5 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数 , 其前 n 项和 S_n 满足 $a_n \cdot S_n = 9(n=1, 2, \dots)$. 给出下列四个结论 :

- ① $\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3 ;
- ② $\{a_n\}$ 为等比数列 ;
- ③ $\{a_n\}$ 为递减数列 ;
- ④ $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项 .

其中所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

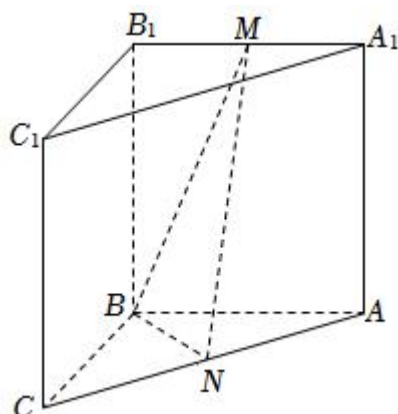
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

- 16 . (13 分) 在 $\triangle ABC$ 中 , $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$.
 (I) 求 $\angle C$;
 (II) 若 $b = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 .
- 17 . (14 分) 如图 , 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 , 侧面 BCC_1B_1 为正方形 , 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $AB = BC = 2$, M , N 分别为 A_1B_1 , AC 的中点 .
 (I) 求证 : $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;
 (II) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知 , 求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值 .

条件①： $AB \perp MN$ ；

条件②： $BM = MN$ ．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．



18 . (13 分) 在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到 $9.50m$ 以上 (含 $9.50m$) 的同学将获得优秀奖．为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据 (单位： m) :

甲： $9.80, 9.70, 9.55, 9.54, 9.48, 9.42, 9.40, 9.35, 9.30, 9.25$ ；

乙： $9.78, 9.56, 9.51, 9.36, 9.32, 9.23$ ；

丙： $9.85, 9.65, 9.20, 9.16$ ．

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立．

(I) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

(II) 设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计 X 的数学期望 EX ；

(III) 在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？ (结论不要求证明)

19 . (15 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$ ，焦距为 $2\sqrt{3}$ ．

(I) 求椭圆 E 的方程；

(II) 过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C ，直线 AB, AC 分别与 x 轴交于点 M, N ．当 $|MN| = 2$ 时，求 k 的值．

20 . (15 分) 已知函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$ ．

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(II) 设 $g(x) = f'(x)$ ，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性；

(III) 证明：对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$ ，有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$ ．

21 . (15 分) 已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为有穷整数数列．给定正整数 m ，若对任意的 $n \in \{1, 2, \dots, m\}$ ，在 Q 中存在 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+j} (j \geq 0)$ ，使得 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+j} = n$ ，则称 Q 为 m -连续可表数列．

(I) 判断 $Q: 2, 1, 4$ 是否为 5 -连续可表数列？是否为 6 -连续可表数列？说明理由；

(II) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 8 -连续可表数列，求证： k 的最小值为 4 ；

(III) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 20 -连续可表数列，且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$ ，求证： $k \geq 7$ ．

2022 年北京市高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = \{x | -3 < x < 3\}$ ，集合 $A = \{x | -2 < x, 1\}$ ，则 $\complement_U A =$ ()

- A. $(-2, 1]$ B. $(-3, -2) \cup [1, 3)$ C. $[-2, 1)$ D. $(-3, -2] \cup (1, 3)$

【思路分析】由补集的定义直接求解即可。

【解析】因为全集 $U = \{x | -3 < x < 3\}$ ，集合 $A = \{x | -2 < x, 1\}$ ，
所以 $\complement_U A = \{x | -3 < x, -2 \text{ 或 } 1 < x < 3\} = (-3, -2] \cup (1, 3)$ 。

故选：D。

【试题评价】本题主要考查补集的运算，考查运算求解能力，属于基础题。

2. 若复数 z 满足 $i \cdot z = 3 - 4i$ ，则 $|z| =$ ()

- A. 1 B. 5 C. 7 D. 25

【思路分析】把已知等式变形，再由商的模等于模的商求解。

【解析】由 $i \cdot z = 3 - 4i$ ，得 $z = \frac{3 - 4i}{i}$ ，

$$\therefore |z| = \left| \frac{3 - 4i}{i} \right| = \frac{|3 - 4i|}{|i|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}{1} = 5.$$

故选：B。

【试题评价】本题考查复数模的求法，考查化归与转化思想，是基础题。

3. 若直线 $2x + y - 1 = 0$ 是圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 的一条对称轴，则 $a =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1

【思路分析】由圆的方程求得圆心坐标，代入直线方程即可求得 a 值。

【解析】圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 的圆心坐标为 $(a, 0)$ ，

直线 $2x + y - 1 = 0$ 是圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 的一条对称轴，

\therefore 圆心在直线 $2x + y - 1 = 0$ 上，可得 $2a + 0 - 1 = 0$ ，即 $a = \frac{1}{2}$ 。

故选：A。

【试题评价】本题考查直线与圆位置关系的应用，明确直线过圆心是关键，是基础题。

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1 + 2^x}$ ，则对任意实数 x ，有 ()

- A. $f(-x) + f(x) = 0$ B. $f(-x) - f(x) = 0$
C. $f(-x) + f(x) = 1$ D. $f(-x) - f(x) = \frac{1}{3}$

【思路分析】根据题意计算 $f(x) + f(-x)$ 的值即可。

【解析】因为函数 $f(x) = \frac{1}{1 + 2^x}$ ，所以 $f(-x) = \frac{1}{1 + 2^{-x}} = \frac{2^x}{2^x + 1}$ ，

所以 $f(-x) + f(x) = \frac{1 + 2^x}{1 + 2^x} = 1$ 。

故选：C .

【试题评价】 本题考查了指数的运算与应用问题，是基础题 .

5 . 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, 则 ()

A . $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ 上单调递减

B . $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12})$ 上单调递增

C . $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递减

D . $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调递增

【思路分析】 利用二倍角公式化简得 $f(x) = \cos 2x$, 周期 $T = \pi$, 根据余弦函数的单调性可得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi](k \in \mathbb{Z})$, 单调递增区间为 $[\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi](k \in \mathbb{Z})$, 进而逐个判断各个选项的正误即可 .

【解析】 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, 周期 $T = \pi$,

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi](k \in \mathbb{Z})$, 单调递增区间为 $[\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi](k \in \mathbb{Z})$,

对于 A , $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ 上单调递增, 故 A 错误 ,

对于 B , $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, \frac{\pi}{12})$ 上单调递减, 故 B 错误 ,

对于 C , $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递减, 故 C 正确 ,

对于 D , $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调递增, 故 D 错误 ,

故选：C .

【试题评价】 本题主要考查了二倍角公式，考查了余弦函数的单调性，属于基础题 .

6 . 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的无穷等差数列，则“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时， $a_n > 0$ ”的 ()

A . 充分而不必要条件

B . 必要而不充分条件

C . 充分必要条件

D . 既不充分也不必要条件

【思路分析】 根据等差数列的定义与性质，结合充分必要条件的定义，判断即可 .

【解析】【解法一】：因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的无穷等差数列，当 $\{a_n\}$ 为递增数列时，公差 $d > 0$,

令 $a_n = a_1 + (n-1)d > 0$, 解得 $n > 1 - \frac{a_1}{d}$, $[1 - \frac{a_1}{d}]$ 表示取整函数，

所以存在正整数 $N_0 = 1 + [1 - \frac{a_1}{d}]$, 当 $n > N_0$ 时， $a_n > 0$, 充分性成立；

当 $n > N_0$ 时， $a_n > 0$, $a_{n-1} < 0$, 则 $d = a_n - a_{n-1} > 0$, 必要性成立；

是充分必要条件 . 故选：C .

【解法二】：(田昊补解) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d \neq 0$, 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数 .

若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $d > 0$,

若 $a_1 \geq 0$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n > a_1 \geq 0$; 若 $a_1 < 0$, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$,

由 (令或若) $a_n = a_1 + (n-1)d > 0$ 可得 $n > 1 - \frac{a_1}{d}$, 取 $N_0 = \left[1 - \frac{a_1}{d}\right] + 1$, 则当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$,

所以, “ $\{a_n\}$ 是递增数列” \Rightarrow “存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”;

若存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$, 取 $k \in \mathbb{N}^*$ 且 $k > N_0$, $a_k > 0$,

假设 $d < 0$, 令 $a_n = a_k + (n-k)d < 0$ 可得 $n > k - \frac{a_k}{d}$, 且 $k - \frac{a_k}{d} > k$,

当 $n > \left[k - \frac{a_k}{d}\right] + 1$ 时, $a_n < 0$, 与题设矛盾, 假设不成立, 则 $d > 0$, 即数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

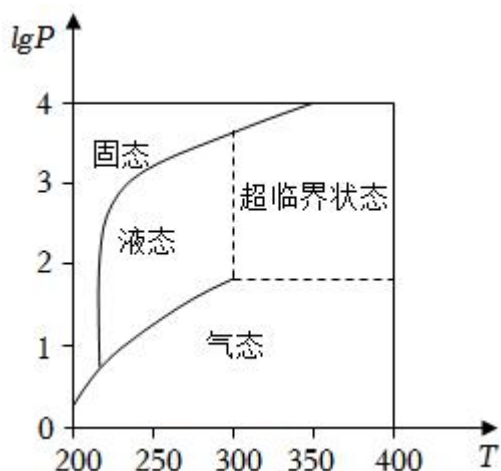
所以, “ $\{a_n\}$ 是递增数列” \Leftarrow “存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”.

所以, “ $\{a_n\}$ 是递增数列” 是 “存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ” 的充分必要条件.

故选: C.

【试题评价】 本题考查了等差数列与充分必要条件的应用问题, 是基础题.

7. 在北京冬奥会上, 国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系, 其中 T 表示温度, 单位是 K ; P 表示压强, 单位是 bar . 下列结论中正确的是 ()



A. 当 $T = 220$, $P = 1026$ 时, 二氧化碳处于液态

B. 当 $T = 270$, $P = 128$ 时, 二氧化碳处于气态

C. 当 $T = 300$, $P = 9987$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

D. 当 $T = 360$, $P = 729$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

【思路分析】 计算每个选项的 $\lg P$ 的值, 结合 T 与图可判断结论.

【解析】 对于 A, 当 $T = 220$, $P = 1026$ 时, $\lg P > 3$, 由图可知二氧化碳处于固态, 故 A 错误;

对于 B: 当 $T = 270$, $P = 128$ 时, $2 < \lg P < 3$, 由图可知二氧化碳处于液态, 故 B 错误;

对于 C: 当 $T = 300$, $P = 9987$ 时, $\lg P \approx 4$, 由图可知二氧化碳处于固态, 故 C 错误;

对于 D : 当 $T = 360$, $P = 729$ 时 , $2 < \lg P < 3$, 由图可知二氧化碳处于超临界状态 , 故 D 正确 ;

故选 : D .

【试题评价】 本题考查对数的计算 , 考查看图的能力 , 数形结合思想 , 属基础题 .

8 . 若 $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 = (\quad)$

- A . 40 B . 41 C . -40 D . -41

【思路分析】 由题意 , 利用二项式展开式的通项公式 , 求出 a_0 和 a_2 , 以及 a_4 的值 , 可得结论 .

【解析】【解法一】 $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$,

$\therefore a_0 + a_2 + a_4 = C_4^4 + C_4^2 \cdot 2^2 + C_4^0 \cdot 2^4 = 1 + 24 + 16 = 41$, 故选 : B .

【解法二】:(田昊补解) 赋值法 : 令 $x=1$, 原式为 : $1 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ ---① , 令 $x=-1$, $81 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$ ---② , ①+②得 : $a_4 + a_2 + a_0 = 41$, 故选 : B .

【试题评价】 本题主要考查二项式定理的应用 , 二项式展开式的通项公式 , 属于基础题 .

9 . 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6 , S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合 . 设集合 $T = \{Q \in S \mid PQ \leq 5\}$, 则 T 表示的区域的面积为 (\quad)

- A . $\frac{3\pi}{4}$ B . π C . 2π D . 3π

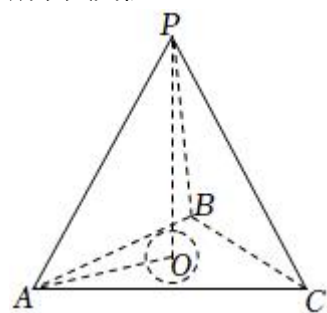
【思路分析】 设点 P 在面 ABC 内的投影为点 O , 连接 OA , 根据正三角形的性质求得 OA 的长 , 并由勾股定理求得 OP 的长 , 进而知 T 表示的区域是以 O 为圆心 , 1 为半径的圆 .

【解析】 设点 P 在面 ABC 内的投影为点 O , 连接 OA , 则 $OA = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

所以 $OP = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \sqrt{36 - 12} = 2\sqrt{6}$,

由 $\sqrt{PQ^2 - OP^2} = \sqrt{25 - 24} = 1$, 知 T 表示的区域是以 O 为圆心 , 1 为半径的圆 ,

所以其面积 $S = \pi$.



故选 : B .

【试题评价】 本题考查棱锥的结构特征 , 点的轨迹问题 , 考查空间立体感和运算求解能力 , 属于基础题 .

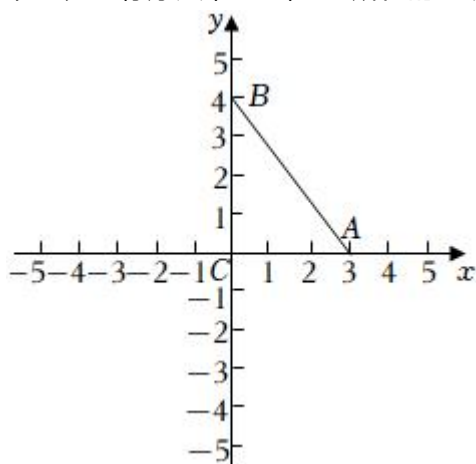
10 . 在 $\triangle ABC$ 中 , $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点 , 且 $PC = 1$, 则 $PA \cdot PB$ 的取值范围是 (\quad)

- A . $[-5, 3]$ B . $[-3, 5]$ C . $[-6, 4]$ D . $[-4, 6]$

【思路分析】 根据条件 , 建立平面直角坐标系 , 设 $P(x,y)$, 计算可得 $PA \cdot PB = -3x - 4y + 1$, 进而可利用参数方程转化为三角函数的最值问题求解 .

【解析】【解法一】: 在 $\triangle ABC$ 中 , $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$,

以 C 为坐标原点, CA , CB 所在的直线为 x 轴, y 轴建立平面直角坐标系, 如图:



则 $A(3,0)$, $B(0,4)$, $C(0,0)$,

设 $P(x,y)$,

因为 $PC=1$,

所以 $x^2 + y^2 = 1$,

又 $PA=(3-x, -y)$, $PB=(-x, 4-y)$,

所以 $PA \cdot PB = -x(3-x) - y(4-y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y = -3x - 4y + 1$,

设 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$,

所以 $PA \cdot PB = -(3 \cos \theta + 4 \sin \theta) + 1 = -5 \sin(\theta + \varphi) + 1$, 其中 $\tan \varphi = \frac{3}{4}$,

当 $\sin(\theta + \varphi) = -1$ 时, $PA \cdot PB$ 有最小值为 -4 , (雷芳校对) $\sin(\theta + \varphi) = 1$

当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时, $PA \cdot PB$ 有最大值为 6 ,

所以 $PA \cdot PB \in [-4, 6]$,

故选: D .

【解法二】: (田昊补解) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

所以 $CA \perp CB = 0$, $\langle PC, CB \rangle = \left| \frac{\pi}{2} - \langle PC, CA \rangle \right|$, (雷芳校对) $\langle PC, CB \rangle = \frac{3\pi}{2} - \langle PC, CA \rangle$,

$$PA \cdot PB = (PC + CA) \cdot (PC + CB)$$

$$= PC^2 + PC \cdot CA + PC \cdot CB + CA \cdot CB$$

$$= 1 + 3 \cos \langle PC, CA \rangle + 4 \cos \langle PC, CB \rangle + 0$$

$$= 1 + 3 \cos \langle PC, CA \rangle + 4 \sin \langle PC, CA \rangle$$

$$= 1 + 5 \sin[\langle PC, CA \rangle + \varphi]$$

$$\text{其中, } \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \tan \varphi = \frac{3}{4} \text{ (雷芳校对) 其中, } \tan \varphi = \frac{3}{4}$$

所以, $-4 \leq PA \cdot PB \leq 6$ 故选: D

【解法三】: (田昊补解) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$ 设 M 是 AB 的中点,

因为 $AC = 3$, $BC = 4$,

所以 $AB = 5$, $MA \cdot MB = -\frac{25}{4}$, $MA + MB = 0$, $|CM| = \frac{5}{2}$

$$PA \cdot PB = (PM + MA) \cdot (PM + MB)$$

$$\begin{aligned}
 &= PM^2 + PM \cdot MA + PM \cdot MB + MA \cdot MB \\
 \text{(雷芳校对)} &= PM^2 + PM \cdot MA + PM \cdot MB + MA \cdot MB \\
 &= PM^2 - \frac{25}{4}
 \end{aligned}$$

因为 $|PM|_{\min} = |CM| - 1 = \frac{3}{2}$, $|PM|_{\max} = |CM| + 1 = \frac{7}{2}$

所以, $-4 \leq PA \cdot PB \leq 6$

故选: D

【试题评价】 本题考查了平面向量数量积的最值问题, 属于中档题.

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. (5 分) 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

【思路分析】 由分母不为 0, 被开方数非负列不等式组, 即可求解函数的定义域.

【解析】 要使函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 有意义,

$$\text{则 } \begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } x < 1 \text{ 且 } x \neq 0,$$

所以函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

故答案为: $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

【试题评价】 本题主要考查函数定义域的求法, 考查运算求解能力, 属于基础题.

12. (5 分) 已知双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则 $m = -3$.

【思路分析】 化双曲线方程为标准方程, 从而可得 $m < 0$, 求出渐近线方程, 结合已知即可求解 m 的值.

【解析】 双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 化为标准方程可得 $y^2 - \frac{x^2}{-m} = 1$,

所以 $m < 0$, 双曲线的渐近线方程 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{-m}}x$,

又双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$,

所以 $\frac{1}{\sqrt{-m}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $m = -3$. 故答案为: -3 .

【试题评价】 本题主要考查双曲线的简单性质, 考查运算求解能力, 属于基础题.

13. (5 分) 若函数 $f(x) = A \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $A = 1$; $f(\frac{\pi}{12}) = -\sqrt{2}$.

【思路分析】 由题意, 利用函数的零点, 求得 A 的值, 再利用两角差的正弦公式化简 $f(x)$, 可得 $f(\frac{\pi}{12})$ 的值.

【解析】 函数 $f(x) = A \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$, $\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}A - \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 0$,

$\therefore A = 1$, 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$,

$\therefore f(\frac{\pi}{12}) = 2 \sin(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) = 2 \sin(-\frac{\pi}{4}) = -2 \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$, 故答案为: $1; -\sqrt{2}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/597156052160006131>