保密☆启用前

燕博园2024届高三年级综合能力测试（CAT）

数学（新课标I卷）

本试卷共4页，满分150分，考试时间120分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2.作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑：如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上：如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题卡整洁，考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 $z=\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}^5\right)$，则复数 $\bar{z}$ 在复平面上对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知集合 $A=\left\{x\middle|y=\lg\left(3-x\right)\right\}$，$B=\left\{y\middle|y=\sqrt{-x^2+6x}\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-\infty,3]$　　B. $(-\infty,3)$　　C. $[0,3]$　　D. $[0,3)$

3. 已知 $f(x)=2^{|x|}+x^2$，若 $f(a)<3$，则（　　）

A. $a\in(1,+\infty)$　　B. $a\in(-1,1)$　　C. $a\in(-\infty,1)$　　D. $a\in(0,1)$

4. 已知 O 为双曲线 C的中心，F 为双曲线 C 的一个焦点，且 C 上存在点 A，使得 $|OA|=|OF|$，$\cos\angle AOF=\dfrac{7}{25}$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{14}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 5　　D. 7

5. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0$，则“$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left\{x\middle|x\neq1\right\}$”是“$a+b+c=0$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

6. 深度学习是人工智能的一种具有代表性的实现方法，它是以神经网络为出发点的，在神经网络优化中，指数衰减的学习率模型为 $L=L_0D^{\frac{G}{G_0}}$，其中 L 表示每一轮优化时使用的学习率，L_0 表示初始学习率，D 表示衰减系数，G 表示训练迭代轮数，G_0 表示衰减速度.已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为 0.5，衰减速度为 18，且当训练迭代轮数为 18 时，学习率衰减为 0.4，则学习率衰减到 0.2 以下（不含 0.2）所需的训练迭代轮数至少为（　　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$）

A. 72　　B. 74　　C. 76　　D. 78

7. 已知 $\vec{e}$ 为单位向量，向量 $\vec{a}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，$|\vec{a}-\lambda\vec{e}|=1$，则 $|\vec{a}|$ 的最大值为（　　）

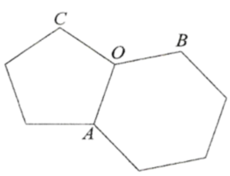
A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 4

8. 已知直线 $l_1: kx-y+1-\sqrt{3}k=0(k\in\mathbf{R})$ 与直线 $l_2: x+ky+\sqrt{3}+k=0(k\in\mathbf{R})$ 相交于点 M，若恰有 3 个不同的点 M 到直线 $l: x-y+b=0$ 的距离为 1，则 $b=$（　　）

A. ± 1　　B. $\pm\sqrt{2}$　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. ± 2

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

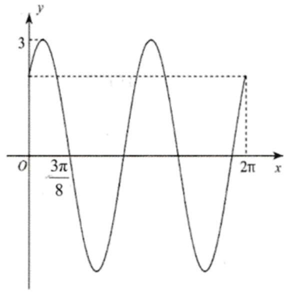
9. 嘌呤是一种杂环有机化合物，它在能量的供应、代谢的调节等方面都有十分重要的作用，它的化学结构式主要由一个正五边形与一个正六边形构成（设它们的边长均为 1)，其平面图形如图所示，则（　　）



A. $|AB|=\sqrt{3}$　　　　B. O 到 AC 的距离是 $\cos 36°$

C. O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心　　　　D. $\tan\angle ABC<\tan\angle BCA<\tan\angle CAB$

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后到函数 $y=g(x)$ 的图象（如图所示)，则（　　）



A. $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$

B. $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{11\pi}{12},\dfrac{7\pi}{6}\right]$ 上为增函数

C. 当 $\dfrac{5}{4}<\lambda\leq\dfrac{9}{4}$ 时，函数 $g(\lambda x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恰有两个不同的极值点

D. $x=\dfrac{5\pi}{24}$ 是函数 $y=f(x)+g(x)$ 的图象的一条对称轴

11. 已知定义域均为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，其导函数分别为 $f'(x)$ 与 $g'(x)$，且 $g(3-x)=f(x+1)-2$，$g'(x+1)=f'(x-1)$，函数 $f(x)$ 的图像关于点 $M(3,0)$ 对称，则（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

B. 8 是函数 $f(x)$ 的一个周期

C. $g(5)=2$

D. $g(-2020)+g(-2024)=-4$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知 a，b，c 是正整数，且 $a\in[10,20]$，$b\in(20,30]$，$c\in(30,40]$，当 a，b，c 方差最小时，写出满足条件的一组 a，b，c 的值________.

13. $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 对边分别为 a，b，c，且 $2c\cos C\sin B+b\sin C=0$，D 为边 AB 上一点，CD 平分 $\angle ACB$，$CD=2$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=$________.

14. 已知表面积为 8π 的球 O 的内接正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=2$，$A_1B_1=1$，动点 P 在 $\triangle ACD_1$ 内部及其边界上运动，则直线 BP 与平面 ACD_1 所成角的正弦值的最大值为________.

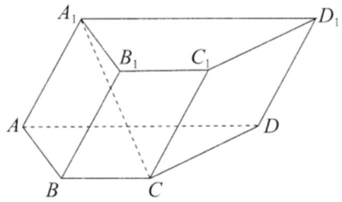
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，n 为正整数，且 $3(S_n-n)=4(a_n-2)$.

（1）求证数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若点 $P\left(a_n-1,\dfrac{b_n+2}{3}\right)$ 在函数 $y=\log_4 x$ 的图象上，且数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=(-1)^{n+1}\dfrac{6n-1}{b_nb_{n+1}}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

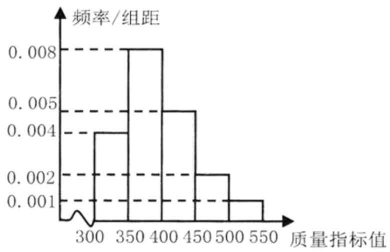
16. 在斜四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=BC=CD=\dfrac{1}{2}AD=2$，$BC\parallel AD$，平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ADD_1=\dfrac{2\pi}{3}$.



（1）求 AB_1 的长；

（2）求二面角 $A-CC_1-D$ 的正切值．

17. 海参中含有丰富的蛋白质、氨基酸、维生素、矿物质等营养元素，随着生活水平的提高，海参逐渐被人们喜爱．某品牌的海参按大小等级划分为 5、4、3、2、1 五个层级，分别对应如下五组质量指标值：$[300,350)$，$[350,400)$，$[400,450)$，$[450,500)$，$[500,550]$. 从该品牌海参中随机抽取 10000 颗作为样本，统计得到如图所示的频率分布直方图．



（1）质量指标值越高，海参越大、质量越好，若质量指标值低于 400 的为二级，质量指标值不低于 400 的为一级．现利用分层随机抽样的方法按比例从不低于 400 和低于 400 的样本中随机抽取 10 颗，再从抽取的 10 颗海参中随机抽取 4 颗，记其中一级的颗数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（2）甲、乙两人计划在某网络购物平台上参加该品牌海参的订单“秒杀”抢购活动，每人只能抢购一个订单，每个订单均由 $n\left(n\ge 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$ 箱海参构成．假设甲、乙两人抢购成功的概率均为 $\dfrac{1}{(n+5)^2}$，记甲、乙两人抢购成功的订单总数量为 Y，抢到海参总箱数为 Z.

①求 Y 的分布列及数学期望；

②当 Z 的数学期望取最大值时，求正整数 n 的值．

18. 设函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-a}{\sqrt{x}}$（常数 $a\neq 0$）.

（1）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（3）证明：$\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}(x\neq 1)$.

19. 在平面直角坐标系中，$A(-t,0)$，$B(t,0)(t>0)$，M 为平面内的一个动点，满足：$|MA|\cdot|MB|\cos^2\dfrac{\angle AMB}{2}=3t^2$.

（1）求动点 M 的轨迹 C 的方程；

（2）设动直线 $l:y=kx+m$ 与曲线 C 有且只有一个公共点 P，且与直线 $x=4t$ 相交于点 Q，该平面上是否存在定点 H，使得以 PQ 为直径的圆恒过点 H？若存在，求出点 H 的坐标；若不存在，请说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 $z=\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}^5\right)$，则复数 $\overline{z}$ 在复平面上对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】由复数的乘法运算化简复数，再由共轭复数的定义和复数的几何意义即可得出答案.

【详解】因为 $\mathrm{i}^5=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^3=(-1)\cdot(-\mathrm{i})=\mathrm{i}$，

$z=\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}^5\right)=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=\mathrm{i}-1$，所以 $\overline{z}=-\mathrm{i}-1$，

所以复数 $\overline{z}$ 在复平面上对应的点为 $(-1,-1)$，位于第三象限.

故选：C.

2. 已知集合 $A=\left\{x\middle|y=\lg(3-x)\right\}$，$B=\left\{y\middle|y=\sqrt{-x^2+6x}\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-\infty,3]$　　B. $(-\infty,3)$　　C. $[0,3]$　　D. $[0,3)$

【答案】D

【解析】

【分析】通过计算函数 $y=\lg\left(3-x\right)$ 定义域求出集合A，计算函数 $y=\sqrt{-x^2+6x}$ 值域求出集合 B，最后通过交集运算即可求解.

【详解】由 $A=\left\{x\left|y=\lg\left(3-x\right)\right.\right\}$，有 $3-x>0$，即 $x<3$，所以 $A=\left(-\infty,3\right)$；

由 $B=\left\{y\left|y=\sqrt{-x^2+6x}\right.\right\}$ 令 $t=-x^2+6x$，根据二次函数的性质有 $t_{\max}=\dfrac{-36}{-4}=9$，

所以 $t\in\left(-\infty,9\right]$，又因为 $y=\sqrt{-x^2+6x}$，所以 $y\in\left[0,3\right]$， $B=\left[0,3\right]$；

所以 $A\cap B=[0,3)$.

故选：D

3. 已知 $f(x)=2^{|x|}+x^2$，若 $f(a)<3$，则（　　）

A. $a\in(1,+\infty)$　　B. $a\in(-1,1)$　　C. $a\in(-\infty,1)$　　D. $a\in(0,1)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据函数为偶函数及函数在 $[0,+\infty)$ 单调递增即可求解.

【详解】因为 $f(x)=2^{|x|}+x^2$ 定义域为R，且 $f(-x)=2^{|-x|}+(-x)^2=2^{|x|}+x^2=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数，

又当 $x\geq 0$ 时， $f(x)=2^x+x^2$ 单调递增，且 $f(1)=3$，

所以由 $f(a)<3$ 可得 $f(|a|)<3=f(1)$，即 $|a|<1$，

解得 $-1<a<1$，

故选：B

4. 已知 O 为双曲线 C 的中心，F 为双曲线 C 的一个焦点，且 C 上存在点 A，使得 $|OA|=|OF|$，$\cos\angle AOF=\dfrac{7}{25}$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{14}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 5　　D. 7

【答案】C

【解析】

【分析】解三角形求出$\left|AF'\right|,\left|AF\right|$，根据双曲线的定义建立方程即可得解.

【详解】不妨设双曲线焦点在x轴上，$F(\mathrm{c},0)$，另一个焦点为$F'(-c,0)$，

因为$|OA|=|OF|=|OF'|$，所以$\vee FAF'$为直角三角形，

因为$|OA|=|OF|=c$，$\cos\angle AOF=\dfrac{7}{25}$，

所以由余弦定理可得$\left|AF\right|=\sqrt{\left|OA\right|^2+\left|OF\right|^2-2\left|OA\right|\left|OF\right|\cos\angle AOF}=\sqrt{2c^2-\dfrac{7}{25}\times 2c^2}=\dfrac{6}{5}c$，

所以$\left|AF'\right|=\sqrt{\left|F'F\right|^2-\left|AF\right|^2}=\sqrt{4c^2-\dfrac{36}{25}c^2}=\dfrac{8}{5}c$，

由双曲线定义可得，$\left|AF'\right|-\left|AF\right|=\dfrac{8}{5}c-\dfrac{6}{5}c=\dfrac{2c}{5}=2a$，

所以$e=\dfrac{c}{a}=5$.

故选：C

5. 已知$a,b,c\in\mathbf{R}$且$a\neq 0$，则“$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left\{x\middle|x\neq 1\right\}$”是“$a+b+c=0$”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次不等式的解及充分条件、必要条件求解.

【详解】由题意，二次不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left\{x\middle|x\neq 1\right\}$，

则等价于$\begin{cases}a>0\\-\dfrac{b}{2a}=1\\\Delta=b^2-4ac=0\end{cases}$，即$a=c>0,b=-2a$，即$a+b+c=0$，

当$a+b+c=0$时，不能推出$a=c>0,b=-2a$，

所以“$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left\{x\middle|x\neq 1\right\}$”是“$a+b+c=0$”的充分不必要条件，

故选：A

6.

深度学习是人工智能的一种具有代表性的实现方法，它是以神经网络为出发点的，在神经网络优化中，指数衰减的学习率模型为 $L=L_0D^{\frac{G}{G_0}}$，其中 L 表示每一轮优化时使用的学习率，L_0 表示初始学习率，D 表示衰减系数，G 表示训练迭代轮数，G_0 表示衰减速度.已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为 0.5，衰减速度为 18，且当训练迭代轮数为 18 时，学习率衰减为 0.4，则学习率衰减到 0.2 以下（不含 0.2）所需的训练迭代轮数至少为（　　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$）

A. 72　　　　B. 74　　　　C. 76　　　　D. 78

【答案】B

【解析】

【分析】根据已知条件列方程，可得 $D=\frac{4}{5}$，再由 $0.5\times(\frac{4}{5})^{\frac{G}{18}}<0.2$，结合指对数关系和对数函数的性质求解即可.

【详解】由于 $L=L_0D^{\frac{G}{G_0}}$，所以 $L=0.5\times D^{\frac{G}{18}}$，

依题意 $0.4=0.5\times D^{\frac{18}{18}}$，则 $D=\frac{4}{5}$，

则 $L=0.5\times\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{G}{18}}$，

由 $L=0.5\times(\frac{4}{5})^{\frac{G}{18}}<0.2$，

所以，即 $G>18\log_{\frac{4}{5}}\frac{2}{5}=\frac{18\left(\lg 5-\lg 2\right)}{\lg 5-2\lg 2}=\frac{18(1-2\lg 2)}{1-3\lg 2}\approx 73.9$，

所以所需的训练迭代轮数至少为 74 次.

故选：B

7. 已知 $\vec{e}$ 为单位向量，向量 $\vec{a}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，$\left|\vec{a}-\lambda\vec{e}\right|=1$，则 $\left|\vec{a}\right|$ 的最大值为（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. $\sqrt{5}$　　　　D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】设 $\vec{e}=(1,0)$，$\vec{a}=\left(x,y\right)$，根据 $\vec{a}\cdot\vec{e}=2$ 求出 x，再根据 $\left|\vec{a}-\lambda\vec{e}\right|=1$ 得到 $y^2=1-\left(2-\lambda\right)^2$，最后根据向量模的坐标表示及二次函数的性质计算可得.

【详解】依题意设 $\vec{e}=(1,0)$，$\vec{a}=\left(x,y\right)$，

由$\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，所以$x=2$，则$\vec{a}=\left(2,y\right)$，

又$\vec{a}-\lambda\vec{e}=(2,y)-(\lambda,0)=(2-\lambda,y)$，且$|\vec{a}-\lambda\vec{e}|=1$，

所以$\sqrt{(2-\lambda)^2+y^2}=1$，即$y^2=1-(2-\lambda)^2$，

所以$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+y^2}=\sqrt{4+1-(2-\lambda)^2}\le\sqrt{5}$，当且仅当$\lambda=2$时取等号，

即$|\vec{a}|$的最大值为$\sqrt{5}$.

故选：C

8. 已知直线$l_1:kx-y+1-\sqrt{3}k=0(k\in\mathbf{R})$与直线$l_2:x+ky+\sqrt{3}+k=0(k\in\mathbf{R})$相交于点$M$，若恰有3个不同的点$M$到直线$l:x-y+b=0$的距离为1，则$b=$（　　）

A. ±1　　B. $\pm\sqrt{2}$　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. ±2

【答案】B

【解析】

【分析】根据直线垂直确定M轨迹为圆，再由圆上存在三点到直线距离相等转化为圆心到直线距离为1求解.

【详解】由$l_1:kx-y+1-\sqrt{3}k=0(k\in\mathbf{R})$可得$k(x-\sqrt{3})-y+1=0$，

即l_1过定点$A(\sqrt{3},1)$，

由$l_2:x+ky+\sqrt{3}+k=0(k\in\mathbf{R})$可得$x+\sqrt{3}+k(y+1)=0$，

即l_2过定点$B(-\sqrt{3},-1)$，

又$l_1\perp l_2$，所以M的轨迹是以AB为直径的圆（不含A,B），

其中圆心为$(0,0)$，半径为$r=|OA|=2$，

所以圆上恰有3个不同的点M到直线$l:x-y+b=0$的距离为1，

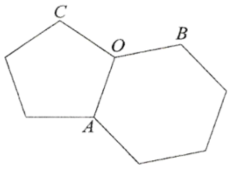
只需圆心到直线的距离等于1，

即$d=\dfrac{|0-0+b|}{\sqrt{2}}=1$，解得$b=\pm\sqrt{2}$.

故选：B

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 嘌呤是一种杂环有机化合物，它在能量的供应、代谢的调节等方面都有十分重要的作用，它的化学结构式主要由一个正五边形与一个正六边形构成（设它们的边长均为 1），其平面图形如图所示，则（　　）



A. $|AB|=\sqrt{3}$

B. O 到 AC 的距离是 $\cos 36°$

C. O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心

D. $\tan\angle ABC<\tan\angle BCA<\tan\angle CAB$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据正六边形的内角及余弦定理判断 A，由正五边形的内角判断 B，根据 OC 不是角平分线判断 C，根据角的大小及正切函数判断 D.

【详解】由正六边形知 $\angle AOB=120°$，由余弦定理得

$\left|AB\right|=\sqrt{\left|OA\right|^2+\left|OB\right|^2-2\left|OA\right|\left|OB\right|\cos 120°}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$，故 A 正确；

由正五边形知，$\angle AOC=108°$，所以 $\angle ACO=90°-\dfrac{108°}{2}=36°$，

故 O 到 AC 的距离是 $OC\sin 36°=\sin 36°$，故 B 错误；

因为 $\angle COB=360°-108°-120°=132°$，所以 $\angle OCB=\dfrac{180°-132°}{2}=24°$，即 OC 不平分 $\angle ACB$，

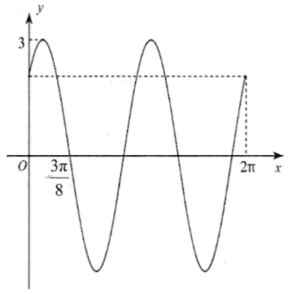
所以 O 不是 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心，故 C 错误；

由题意，$\angle ABC=30°+24°=54°$，$\angle BCA=24°+36°=60°$，$\angle CAB=36°+30°=66°$，

由正切函数的单调性可知 $\tan\angle ABC<\tan\angle BCA<\tan\angle CAB$，故 D 正确.

故选：AD

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后到函数 $y=g(x)$ 的图象（如图所示），则（　　）



A. $\varphi=\frac{\pi}{12}$

B. $f(x)$在$\left[\frac{11\pi}{12},\frac{7\pi}{6}\right]$上为增函数

C. 当$\frac{5}{4}<\lambda\le\frac{9}{4}$时，函数$g(\lambda x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恰有两个不同的极值点

D. $x=\frac{5\pi}{24}$是函数$y=f(x)+g(x)$的图象的一条对称轴

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据图象求出$g(x)$解析式，由平移可得$f(x)$解析式即可判断A，根据所给自变量范围及正弦函数的单调性判断B，根据自变量范围及参数范围，确定$\pi\lambda+\frac{\pi}{4}$的范围即可判断C，由三角恒等变换化简，由正弦型函数的对称性判断D.

【详解】根据平移性质，可设$g(x)=A\sin\left(\omega x+\theta\right)\left(|\theta|<\frac{\pi}{2}\right)$，

由图象可得$A=3,2T=2\pi$，即$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得$\omega=2$，

所以$g(x)=3\sin\left(2x+\theta\right)$，又$g\left(\frac{3\pi}{8}\right)=3\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)=0$，

所以$\theta=\frac{\pi}{4}$，即$g\left(x\right)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

对于A，则$f\left(x\right)=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$，即$\varphi=-\frac{\pi}{12}$，故A错误；

对于B，当$x\in\left[\frac{11\pi}{12},\frac{7\pi}{6}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{12}\in\left[\frac{7\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$，由正弦函数单调性知，$f(x)$在$\left[\frac{11\pi}{12},\frac{7\pi}{6}\right]$上为增函数，故B正确；

对于C，$g(\lambda x)=3\sin\left(2\lambda x+\frac{\pi}{4}\right)$，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$2\lambda x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\lambda+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为$\frac{5}{4}<\lambda\le\frac{9}{4}$，所以$\pi\times\frac{5}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}<\pi\lambda+\frac{\pi}{4}\le\frac{9\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$，

显然$2\lambda x+\frac{\pi}{4}$能取到$\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$，不能取到$\frac{5\pi}{2}$，所以函数$g(\lambda x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恰有两个不同的极值点，故C正确；

对于 D，因为 $y=f(x)+g(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)+3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=6\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=3\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$，

所以当 $x=\frac{5\pi}{24}$ 时，$3\sqrt{3}\sin\left(2\times\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{12}\right)=3\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}=3\sqrt{3}$ 取得最大值，所以 $x=\frac{5\pi}{24}$ 是函数的一条对称轴，故 D 正确.

故选：BCD

11. 已知定义域均为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，其导函数分别为 $f'(x)$ 与 $g'(x)$，且 $g(3-x)=f(x+1)-2$，$g'(x+1)=f'(x-1)$，函数 $f(x)$ 的图像关于点 $M(3,0)$ 对称，则（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

B. 8 是函数 $f(x)$ 的一个周期

C. $g(5)=2$

D. $g(-2020)+g(-2024)=-4$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题意，先由条件以及函数 $f\left(x\right)$ 的对称中心可得函数 $f\left(x\right)$ 的周期，即可判断 AB，再赋值计算，结合函数 $f\left(x\right)$ 的周期性以及对称性，即可判断 CD

【详解】因为 $g(3-x)=f(x+1)-2$，令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，

即 $g\left(4-t\right)=f\left(t\right)-2$，所以 $g\left(4-x\right)=f\left(x\right)-2$，

用 $\left(x-1\right)$ 替换 x 可得 $g\left(5-x\right)=f\left(x-1\right)-2$，即 $f\left(x-1\right)=g\left(5-x\right)+2$，

又 $g'(x+1)=f'(x-1)$，则 $g\left(x+1\right)+a=f\left(x-1\right)+b$，$a,b\in\mathbf{R}$，

所以 $g\left(x+1\right)+a=g\left(5-x\right)+2+b$，令 $x=2$，可得 $g\left(3\right)+a=g\left(3\right)+2+b$，

所以 $a=b+2$，

再由 $g(3-x)=f(x+1)-2$，令 $3-x=m$，则 $m=3-x$，

所以 $g\left(m\right)=f\left(4-m\right)-2$，即 $g\left(x\right)=f\left(4-x\right)-2$，

用 $\left(x+1\right)$ 替换 x，可得 $g\left(x+1\right)=f\left(3-x\right)-2$，