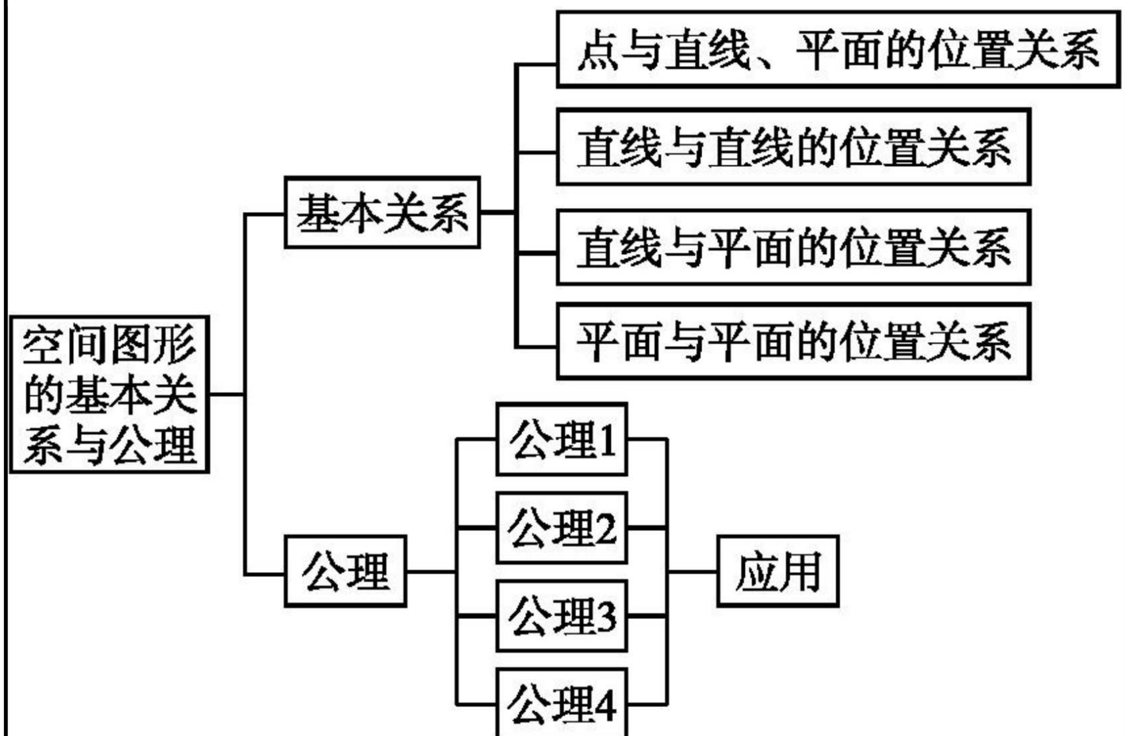
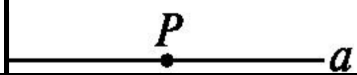
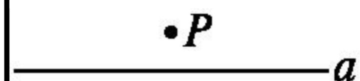
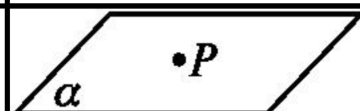
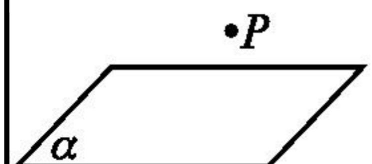
§4　空间图形的基本关系与公理

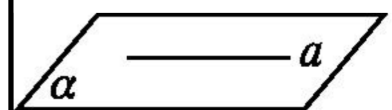
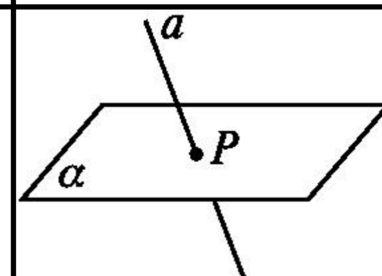
第1课时　空间图形的基本关系与公理

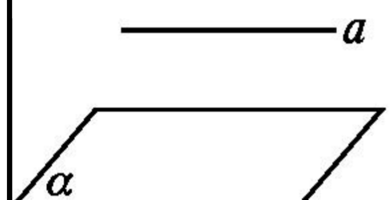
<table>
<tr><th>课　标　阐　释</th><th>思　维　脉　络</th></tr>
<tr><td>1.理解空间中点、线、面之间的基本关系,并会用符号表示.
2.掌握空间图形的4个公理,并能用文字语言、图形语言、符号语言准确表示.
3.能运用4个公理解决共点、共线、共面问题的证明.</td><td>
</td></tr>
</table>

1.空间点与直线、点与平面的位置关系

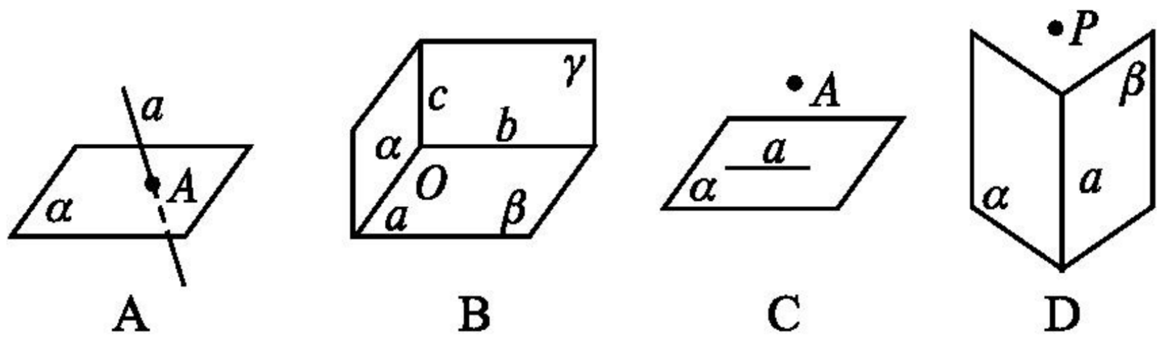
	位置关系	图形语言	符号语言
点与直线	点在直线上		$P\in a$
	点在直线外		P____a
点与平面	点在平面内		P____α
	点在平面外		$P\notin\alpha$

2.空间直线与平面的位置关系

位置关系	文字语言	图形语言	符号语言
直线在平面内	如果直线 a 与平面 α 有____个公共点,我们称直线 a 在平面 α 内		a__α
直线与平面相交	如果直线 a 与平面 α 只有____公共点 P,我们称直线 a 与平面 α 相交		a__$\alpha=P$

位置关系	文字语言	图形语言	符号语言
直线与平面平行	如果直线 a 与平面 α ____ 公共点,我们称直线 a 与平面 α 平行		a__α

【做一做1】 把下列符号叙述所对应的图形的字母编号填在题后横线上.



(1)$A\notin\alpha,a\subsetneqq\alpha$____________.

(2)$\alpha\cap\beta=a,P\notin\alpha$且$P\notin\beta$____________.

(3)$a\nsubseteq\alpha,a\cap\alpha=A$____________.

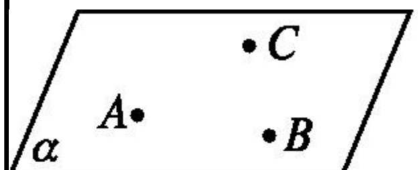
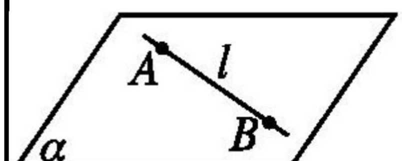
(4)$\alpha\cap\beta=a,\alpha\cap\gamma=c,\beta\cap\gamma=b,a\cap b\cap c=O$____________.

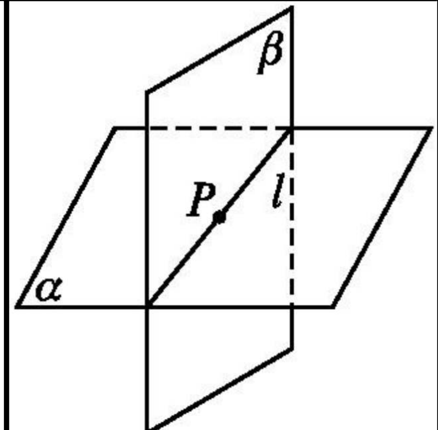
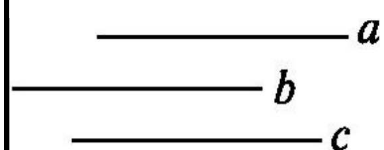
答案:(1)C (2)D (3)A (4)B

名师点拨直线与平面平行和直线与平面相交统称为直线在平面外,即

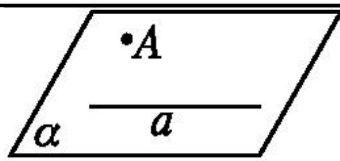
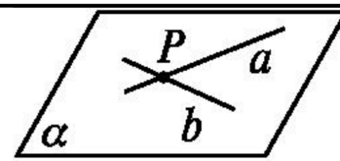
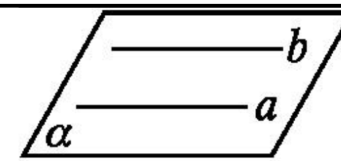
直线与平面的位置关系
- 直线在平面内
- 直线在平面外
  - 直线与平面平行
  - 直线与平面相交

3.空间图形的公理

	文字语言	图形语言	符号语言
公理1	过不在一条直线上的三点,有且只有一个平面(即可以确定一个平面)		A,B,C 三点不共线⇒有且只有一个平面 α,使 $A\in\alpha,B\in\alpha,C\in\alpha$
公理2	如果一条直线上的____在一个平面内,那么这条直线在此平面内(即直线在平面内)		若 $A\in l,B\in l$,且 $A\in\alpha,B\in\alpha$,则 $l\subsetneqq\alpha$

公理3	如果两个不重合的平面有一个______，那么它们有且只有一条过该点的公共直线		给定点 P 以及平面 α,β，若点 $P\in\alpha$，且 $P\in\beta$，则存在直线 l，使得 $\alpha\cap\beta=l$，且 $P\in l$
公理4	平行于同一条直线的两条直线______		已知直线 a,b,c，且 $a/\!/b$，$b/\!/c\Rightarrow$______

知识拓展根据公理1,可以得到以下3个推论,它们都可以作为在空间中确定平面的依据.

语言形式	推论1	推论2	推论3
文字语言	经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面	经过两条相交直线有且只有一个平面	经过两条平行直线有且只有一个平面
	一条直线和直线外一点确定一个平面	两条相交直线确定一个平面	两条平行直线确定一个平面
图形语言			
符号语言	$A\notin a\Rightarrow$有且只有一个平面α,使$A\in\alpha$,$a\subset\alpha$	$a\cap b=P\Rightarrow$有且只有一个平面α,使$a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$	$a/\!/b\Rightarrow$有且只有一个平面α,使$a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$

【做一做2】 下列说法正确的是( )

A.三点确定一个平面

B.四边形一定是平面图形

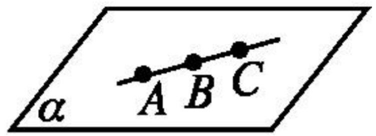
C.三角形一定是平面图形

D.平面α和平面β有不同在一条直线上的三个交点

解析:本题考查平面的基本知识.A选项,当三点共线时有无数多个平面;B选项,四边形有空间四边形与平面四边形之分;C选项,三角形的三个顶点不共线,根据公理1可知三角形的三个顶点确定一个平面;D选项,若具有D选项中的条件,则α与β重合.故选C.

答案:C

【做一做3】 如图所示,点A在平面α内,点B也在平面α内,点C在直线AB上.



(1)用符号语言表示上述位置关系;

(2)判断点C与平面α的关系.

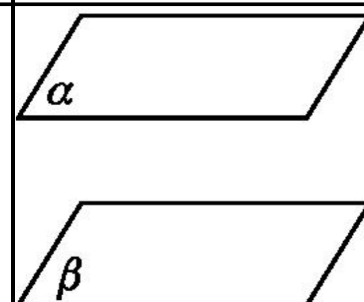
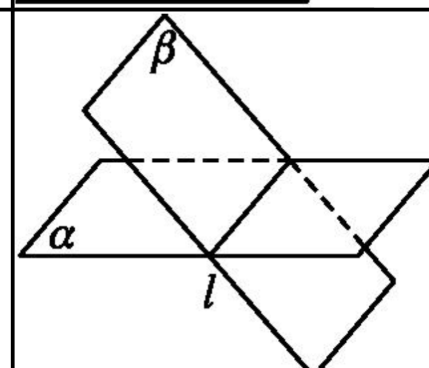
分析:由公理2可知AB在平面α内,而点C在直线AB上,所以点C在平面α内.

解:(1)$A\in\alpha$,$B\in\alpha$,$C\in AB$.

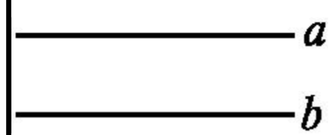
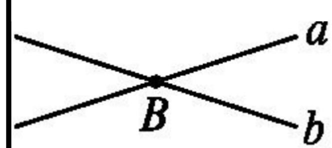
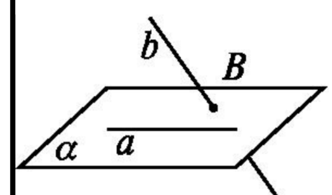
(2)因为$A\in\alpha$,$B\in\alpha$,所以$AB\subsetneqq\alpha$.

又因为$C\in AB$,所以$C\in\alpha$.

4.空间平面与平面的位置关系(除重合外)

位置关系	文字语言	图形语言	符号语言
两个平面不相交(平行)	如果平面 α 与平面 β ____ 公共点,我们称平面 α 与平面 β 是平行平面		$\alpha /\!/ \beta$
两个平面相交	如果平面 α 和平面 β 不 ____ ,但有公共点,我们称平面 α 与平面 β 是相交平面		$\alpha \cap \beta = l$

5.空间两条直线的位置关系

位置关系	文字语言	图形语言	符号语言
平行直线	如果直线 a 和 b 在同一个平面内,但____公共点,这样的两条直线叫作平行直线		a__b
相交直线	如果直线 a 和 b 只有____公共点 B,这样的两条直线叫作相交直线		a__$b=B$
异面直线	如果直线 a 和 b 是不共面(不同在任何一个平面内)的两条直线,这样的两条直线叫作异面直线		$a\subsetneqq\alpha$ $b\cap\alpha=B$ $a\cap b=\varnothing$

【做一做4】 已知a,b是异面直线,直线$c\parallel a$,则c与b (　　)

A.一定是异面直线　　B.一定是相交直线

C.不可能是平行直线　　D.不可能是相交直线

解析:若a,b异面,$c\parallel a$,则c与b相交或异面,故C正确.

答案:C

思考辨析

判断下列说法是否正确,正确的在后面的括号内打“√”,错误的打“×”.

(1)如果直线a与直线b是异面直线,直线b与直线c也是异面直线,那么直线a与直线c也一定是异面直线. (×)

(2)如果两个平面有三个公共点,那么这两个平面必重合. (×)

(3)平面α与平面β会只有一个公共点. (×)

(4)不共线的四点最多可确定4个平面. (√)

(5)两两相交的三条直线必共面. (×)

探究一公理1的应用

【例1】 证明:两两相交,且不共点的三条直线在同一平面内.

证明:如图所示,已知$l_1\cap l_2=A,l_2\cap l_3=B,l_1\cap l_3=C$.

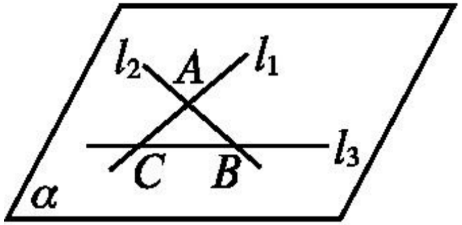
方法一(同一法)

$\because l_1\cap l_2=A$,$\therefore l_1$和l_2确定一个平面α.

$\because l_2\cap l_3=B$,$\therefore B\in l_2$.又$l_2\subsetneqq\alpha$,$\therefore B\in\alpha$.

同理可证$C\in\alpha$.又$B\in l_3,C\in l_3$,$\therefore l_3\subsetneqq\alpha$.

$\therefore$直线l_1,l_2,l_3在同一平面内.



方法二(重合法)

$\because l_1 \cap l_2 = A$, $\therefore l_1, l_2$确定一个平面α.

$\because l_2 \cap l_3 = B$, $\therefore l_2, l_3$确定一个平面β.

$\because A \in l_2, l_2 \subsetneqq \alpha$, $\therefore A \in \alpha$.

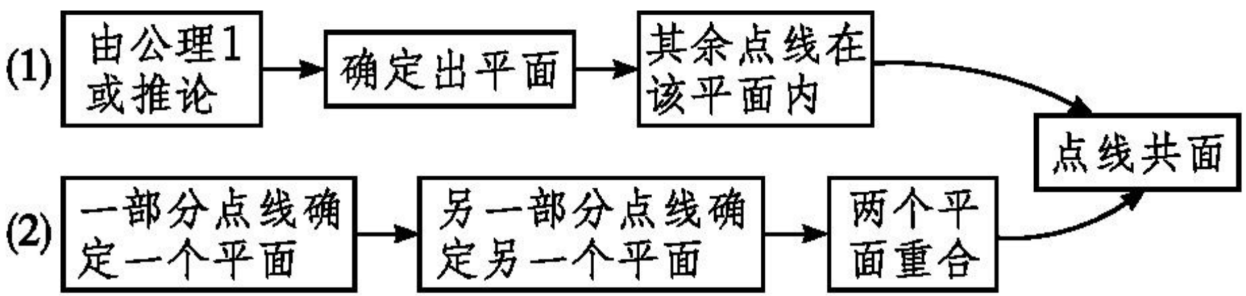
$\because A \in l_2, l_2 \subsetneqq \beta$, $\therefore A \in \beta$.

同理可证$B \in \alpha, B \in \beta, C \in \alpha, C \in \beta$.

$\therefore$不共线的三个点A,B,C既在平面α内,又在平面β内.$\therefore$平面α和β重合,即直线l_1,l_2,l_3在同一平面内.

反思感悟1.公理1的主要作用有两个:一是作为确定平面的依据,判断若干个点或线能否确定平面,确定几个平面等;二是证明点线共面.

2.证明点线共面问题的基本方法主要有以下两种:



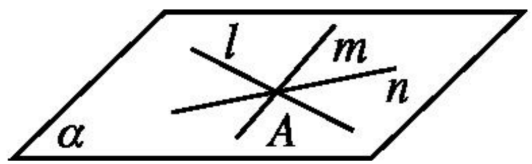
延伸探究(1)把【例1】中的“不共点”删掉呢?这三条直线是否共面?

(2)把【例1】中“三条直线”改为“四条直线”呢?这四条直线是否共面?试证明你的结论.

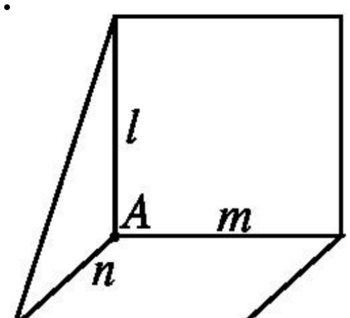
解:(1)不一定共面.

①若三条直线两两相交,且过同一个点.

这三条直线在同一个平面内相交,如图.



这三条直线不共面.如图.



②若三条直线两两相交,且不共点,由【例1】可知,这三条直线共面.

(2)共面.

已知:a,b,c,d四条直线两两相交,且不共点.

求证:a,b,c,d四线共面.

证明:①无三线共点情况,如图.

设$a\cap d=M,b\cap d=N,c\cap d=P,a\cap b=Q,a\cap c=R,b\cap c=S$.

因为$a\cap d=M$,所以a,d可确定一个平面α.

因为$N\in d,Q\in a$,所以$N\in\alpha,Q\in\alpha$,

所以$NQ\subsetneqq\alpha$,即$b\subsetneqq\alpha$.

同理,$c\subsetneqq\alpha$,所以a,b,c,d共面.