第三章　函数及其应用

第2课时　函数的奇偶性与周期性

内容概览

必备知识 · 逐点夯实

核心考点 · 分类突破

【课标解读】

【课程标准】

1.了解函数奇偶性的概念和几何意义.

2.会运用基本初等函数的图象分析函数的奇偶性.

3.了解函数周期性、最小正周期的含义,会判断、应用简单函数的周期性.

【核心素养】

数学抽象、逻辑推理、直观想象.

【命题说明】

考向考法	高考命题常以基本初等函数为载体,考查函数的奇偶性、周期性和图象的对称性及其应用.函数的奇偶性与单调性、周期性的综合问题是高考热点,常以选择题的形式出现.
预测	预计2025年高考仍会考查函数的单调性、单调区间及函数最值的确定与应用;题型既有选择题、填空题,又有解答题.

必备知识 · 逐点夯实

返回

知识梳理·归纳

1.函数的奇偶性

奇偶性	定义	图象
偶函数	设函数$f(x)$的定义域为D,如果$\forall x\in D$,都有$-x\in D$,且__$f(-x)=f(x)$__,那么函数$f(x)$就叫做偶函数	关于__y轴__对称
奇函数	设函数$f(x)$的定义域为D,如果$\forall x\in D$,都有$-x\in D$,且__$f(-x)=-f(x)$__,那么函数$f(x)$就叫做奇函数	关于__原点__对称

微点拨 奇、偶函数定义域的特点是关于原点对称,函数的定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要不充分条件.

2.函数的周期性

(1)周期函数:设函数$f(x)$的定义域为D,如果存在一个非零常数T,使得对每一个$x\in D$都有$x+T\in D$,且$f(x+T)=$__$f(x)$__,那么函数$f(x)$就叫做周期函数.非零常数__T__叫做这个函数的周期.

(2)最小正周期:如果在周期函数$f(x)$的所有周期中存在一个__最小__的正数,那么这个最小的正数就叫做$f(x)$的最小正周期(若不特别说明,T一般就是指最小正周期).

微点拨存在一个非零常数T,使$f(x+T)=f(x)$为恒等式,即自变量x每增加一个T后,函数值就会重复出现一次.

常用结论

1.函数周期性的常用结论

对$f(x)$定义域内任一自变量的值x:

(1)若$f(x+a)=-f(x)$,则$T=2a(a>0)$.

(2)若$f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$,则$T=2a(a>0)$.

(3)若$f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$,则$T=2a(a>0)$.

2.对称性的四个常用结论

(1)若函数$y=f(x+a)$是偶函数,则函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称.

(2)若函数$y=f(x+b)$是奇函数,则函数$y=f(x)$的图象关于点$(b,0)$中心对称.

(3)若函数$y=f(x)$满足$f(a+x)=f(b-x)$,则$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{a+b}{2}$对称;特别地,当$a=b$时,即$f(a+x)=f(a-x)$或$f(x)=f(2a-x)$时,则$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称.

(4)若函数$y=f(x)$满足$f(x)+f(2a-x)=2b$,则$y=f(x)$的图象关于点(a,b)对称.特别地,当$b=0$时,即$f(a+x)+f(a-x)=0$或$f(x)+f(2a-x)=0$时,则$y=f(x)$的图象关于点$(a,0)$对称.

基础诊断·自测

类型	辨析	改编	易错	高考
题号	1	4	3	2

1.(思考辨析)(正确的打"√",错误的打"×")

(1)函数$y=x^2$在$x\in(0,+\infty)$上是偶函数.(×)

(2)若函数$f(x)$为奇函数,则一定有$f(0)=0$.(×)

(3)若T是函数$f(x)$的一个周期,则$nT(n\in\mathbf{Z},n\neq0)$也是函数$f(x)$的周期.(√)

(4)若函数$f(x)$满足关系$f(a+x)=-f(b-x)$,则函数$f(x)$的图象关于点$(\frac{a+b}{2},0)$对称.

(√)

提示:

(1)	由于偶函数的定义域关于原点对称,故$y=x^2$在$(0,+\infty)$上不具有奇偶性.	×
(2)	由奇函数定义可知,若$f(x)$为奇函数,且在$x=0$处有意义时才满足$f(0)=0$,故错误.	×

2.(2023·上海高考)下列函数是偶函数的是(　　)

A.$y=\sin x$　　　　B.$y=\cos x$

C.$y=x^3$　　　　D.$y=2^x$

【解析】选B.对于A,由正弦函数的性质可知,$y=\sin x$为奇函数;对于B,由余弦函数的性质可知,$y=\cos x$为偶函数;对于C,由幂函数的性质可知,$y=x^3$为奇函数;对于D,由指数函数的性质可知,$y=2^x$为非奇非偶函数.

3.(忽略奇偶函数定义域关于原点对称)已知$f(x)=ax^2+bx$是定义在$[a-1,2a]$上的偶函数,那么$a+b$的值是(　　)

A.$-\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$-\frac{1}{2}$

【解析】选B.因为$f(x)=ax^2+bx$是定义在$[a-1,2a]$上的偶函数,

所以$a-1+2a=0$,所以$a=\frac{1}{3}$.又$f(-x)=f(x)$,所以$b=0$,所以$a+b=\frac{1}{3}$.

4.(必修第一册P86习题T11·变设问)已知函数$f(x)$是定义域为**R**的奇函数,当$x\geq 0$时,$f(x)=x(1+x)$,则$f(-1)=$____-2____.

【解析】$f(1)=1\times 2=2$,又$f(x)$为奇函数,所以$f(-1)=-f(1)=-2$.

核心考点 · 分类突破

返回

考点一函数奇偶性的判断

[例1]判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=x^3-\frac{1}{x}$;

【解析】(1)函数的定义域为$\{x|x\neq0\}$,关于原点对称,并且对于定义域内的任意一个x都有

$f(-x)=(-x)^3-\frac{1}{-x}=-(x^3-\frac{1}{x})=-f(x)$,所以$f(x)$为奇函数.

(2)$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$;

【解析】(2)$f(x)$的定义域为$\{-1,1\}$,关于原点对称.

又$f(-1)=f(1)=0$,$f(-1)=-f(1)=0$,所以$f(x)$既是奇函数又是偶函数.

(3)$f(x)=x^2-|x|+1,x\in[-1,4]$;

【解析】(3)因为$f(x)=x^2-|x|+1,x\in[-1,4]$的定义域不关于原点对称,所以$f(x)$是非奇非偶函数.

(4)$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1, x>0,\\ x^2+2x-1, x<0\end{cases}$;

【解析】(4)方法一(定义法):

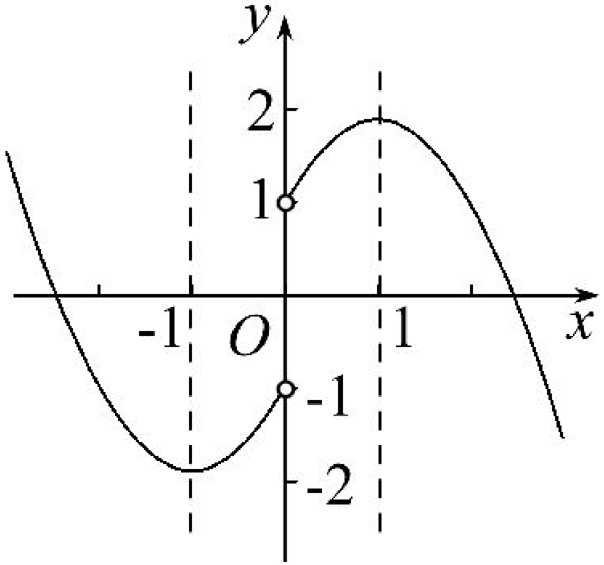
当$x>0$时,$f(x)=-x^2+2x+1$,$-x<0$,$f(-x)=(-x)^2+2(-x)-1=x^2-2x-1=-f(x)$;

当$x<0$时,$f(x)=x^2+2x-1$,$-x>0$,$f(-x)=-(-x)^2+2(-x)+1=-x^2-2x+1=-f(x)$.

所以$f(x)$为奇函数.

方法二(图象法):

作出函数$f(x)$的图象,



由奇函数的图象关于原点对称的特征知函数$f(x)$为奇函数.

(5)$f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,$x\in(-1,1)$.

【解析】(5)已知$f(x)$的定义域为$(-1,1)$,关于原点对称.

因为$f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=-\sqrt{(1-x)(1+x)}$,

所以$f(-x)=-\sqrt{(1+x)(1-x)}=f(x)$,所以$f(x)$是偶函数.

解题技法

1.判断函数的奇偶性的方法

(1)定义法:若函数的定义域不是关于原点对称的区间,则可立即判断该函数既不是奇函数也不是偶函数;若函数的定义域是关于原点对称的区间,再判断$f(-x)$是否等于$\pm f(x)$.

(2)图象法:奇(或偶)函数的充要条件是它的图象关于原点(或y轴)对称.

(3)性质法:偶函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为偶函数;奇函数的和、差仍为奇函数;奇(偶)数个奇函数的积、商(分母不为零)为奇(偶)函数;一个奇函数与一个偶函数的积为奇函数.(注:利用上述结论时要注意各函数的定义域)

2.一些重要类型的奇偶函数模型

(1)函数$f(x)=a^x+a^{-x}(a>0且a\neq1)$是偶函数.

(2)函数$f(x)=a^x-a^{-x}(a>0且a\neq1)$是奇函数.

(3)函数$f(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}(a>0且a\neq1)$是奇函数.

(4)函数$f(x)=\log_a\frac{x-b}{x+b}(a>0且a\neq1)$是奇函数.

对点训练

1.(多选题)下列命题中正确的是(　　)

A.奇函数的图象一定过坐标原点

B.函数$y=x\sin x$是偶函数

C.函数$y=|x+1|-|x-1|$是奇函数

D.函数$y=\frac{x^2-x}{x-1}$是奇函数

【解析】选BC.对于A,只有奇函数在$x=0$处有意义时,函数的图象过原点,所以A不正确;

对于B,因为函数$y=x\sin x$的定义域为**R**且$f(-x)=(-x)\sin(-x)=f(x)$,

所以该函数为偶函数,所以B正确;

对于C,函数$y=|x+1|-|x-1|$的定义域为**R**,关于原点对称,

且满足$f(-x)=|-x+1|-|-x-1|=-(|x+1|-|x-1|)=-f(x)$,即$f(-x)=-f(x)$,

所以函数为奇函数,所以C正确;

对于D,函数$y=\frac{x^2-x}{x-1}$满足$x-1\neq0$,即$x\neq1$,所以函数的定义域不关于原点对称,

所以该函数为非奇非偶函数,所以D不正确.