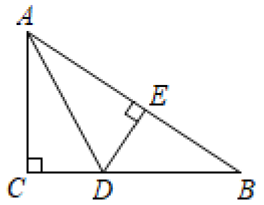
专题05 勾股定理及其逆定理（36题9种题型）

一、利用勾股定理解直角三角形（共5小题）

1．（2023秋·江苏扬州·八年级校考期末）如图，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，AD 平分 $\angle CAB$，$DE\perp AB$ 于 E，若 $AC=6$，$BC=8$，$CD=3$．



（1）求 DE 的长；

（2）求 $\triangle ADB$ 的面积．

【答案】（1）$DE=3$；（2）$S_{\triangle ADB}=15$．

【分析】（1）根据角平分线性质得出 $CD=DE$，代入求出即可；

（2）利用勾股定理求出 AB 的长，然后计算 $\triangle ADB$ 的面积．

【详解】（1）$\because AD$ 平分 $\angle CAB$，$DE\perp AB$，$\angle C=90°$，

$\therefore CD=DE$，

$\because CD=3$，

$\therefore DE=3$；

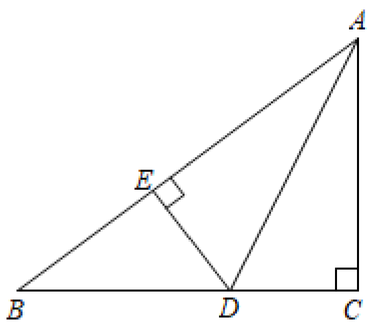
（2）在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理得：$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\therefore\triangle ADB$ 的面积为 $S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}\times 10\times 3=15$．

2．（2023秋·江苏连云港·八年级统考期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E．

（1）求证：$\triangle AED\cong\triangle ACD$；

（2）当 $AC=6$，$BC=8$，求 CD 的长．



【答案】（1）见解析；（2）3

【分析】（1）根据 AD 平分 $\angle BAC$ 得 $\angle BAD=\angle CAD$，根据 $DE\perp AB$ 得 $\angle AED=90°$，用 AAS 即可得证明

△*AED*≌△*ACD*；

（2）设 *CD*＝*x*，由（1）可知△*AED*≌△*ACD*，则 *AC*＝*AE*＝6，*CD*＝*DE*＝*x*，*BD*＝*BC*－*CD*＝8－*x*，根据勾股定理得 *AB*=10，则 *BE*=4，根据勾股定理得 4^2+x^2 ＝（8－*x*）^{2}，即可得．

【详解】（1）∵*AD* 平分∠*BAC*，

∴∠*BAD*＝∠*CAD*，

∵*DE*⊥*AB*，

∴∠*AED*＝90°，

∵在△*AED* 与△*ACD* 中，

$$\begin{cases} \angle AED = \angle C \\ \angle BAD = \angle CAD \\ AD = AD \end{cases}$$

∴△*AED*≌△*ACD*（*AAS*）

（2）设 *CD*＝*x*，

由（1）可知△*AED*≌△*ACD*，

∴*AC*＝*AE*＝6，*CD*＝*DE*＝*x*，*BD*＝*BC*－*CD*＝8－*x*，

∵在△*ABC* 中，∠*C*＝90°，

∴*AB*2＝AC^2＋*BC*2＝6^2＋82＝100，

即 *AB*=10 或 *AB*=-10（舍），

∴*BE*＝*AB*－*AE*＝10－6＝4，

∵在△*BED* 中，∠*BED*＝90°，根据勾股定理，

*BE*2＋ED^2=*BD*2，

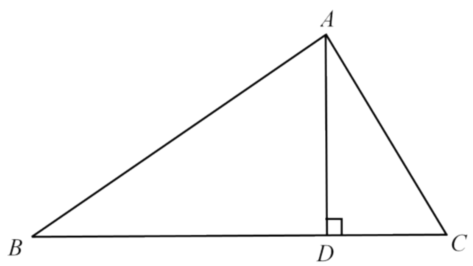
即 4^2+x^2＝（8－*x*）^{2}，

解得 *x*＝3，

即 *CD*=3．

【点睛】本题考查了全等三角形的判定，勾股定理，解题的关键是掌握这些知识点．

3．（2023 秋·江苏南京·八年级校联考期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$，交 BC 于点 D，$AB=17$，$AC=10$．



(1)若 $CD=6$，则 $AD=$_，$BD=$_；

(2)若 $BC=20$，求 CD 的长．

【答案】(1)8；15

(2)$\frac{211}{40}$

【分析】（1）先在Rt△ADC中，由勾股定理求出AD，再在Rt△ADB中，由勾股定理求出BD即可；

（2）由勾股定理得出$AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$，即$AB^2-(BC-CD)^2=AC^2-CD^2$，代入条件计算即可．

【详解】（1）解：$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$，

在Rt△ADC中，由勾股定理，得

$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

在Rt△ADB中，由勾股定理，得

$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$；

（2）解：在Rt△ADC中，由勾股定理，得

$AD^2=AC^2-CD^2$，

在Rt△ADB中，由勾股定理，得

$AD^2=AB^2-BD^2$，

$\therefore AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$，即$AB^2-(BC-CD)^2=AC^2-CD^2$

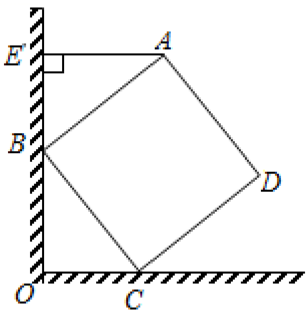
$\because AB=17$，$AC=10$，$BC=20$，

$\therefore 17^2-(20-CD)^2=10^2-CD^2$，

$\therefore CD=\frac{211}{40}$．

【点睛】本题考查勾股定理，熟练掌握勾股定理是解题的关键．

4．（2023秋·江苏淮安·八年级校考期末）如图，一块边长为5的正方形木板$ABCD$斜靠在墙边，$OC\perp OB$，点A，B，C，D，O在同一平面内，过点A作$AE\perp OB$于点E．



(1)求证：△ABE≌△BCO;

(2)若OC＝3，求EO的长．

【答案】(1)见解析

(2)7

【分析】（1）由“AAS”可证△ABE≌△BCO;

（2）由勾股定理可得 $BO=4$，即可求解．

【详解】（1）解：证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，

∵$OC\perp OB$，$AE\perp OB$，

∴$\angle AEB=\angle BOC=90°$，

∴$\angle ABE+\angle BAE=90°=\angle ABE+\angle OBC$，

∴$\angle BAE=\angle OBC$，

在△ABE 和△BCO 中，

$$\begin{cases}\angle BAE=\angle OBC\\ \angle AEB=\angle BOC\\ AB=BC\end{cases}，$$

∴△ABE≌△BCO；

（2）∵△ABE≌△BCO，

∴$BE=OC=3$，

在 Rt△BOC 中，$BO=\sqrt{BC^2-OC^2}=4$，

∴$OE=OB+BE=7$．

【点睛】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，证明三角形全等是解题的关键．

5．（2023 春·江苏·八年级期中）在 $\triangle ABC$ 中，$AB=25$，$AC=10\sqrt{5}$，AP 垂直直线 BC 于点 P．

(1)当 $BC=25$ 时，求 AP 的长；

(2)当 $AP=20$ 时，

①求 BC 的长；

②将 $\triangle ACP$ 沿直线 AC 翻折后得到 $\triangle ACQ$，连接 BQ，请直接写出 $\triangle BCQ$ 的周长为___________．

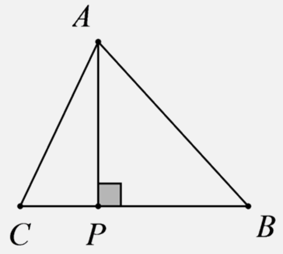
【答案】(1)20

(2)①25 或 5；② $5\sqrt{41}+35$ 或 $\sqrt{65}+15$

【分析】（1）根据双勾股列方程即可求出 CP，进而求得 AP 的长；

（2）分情况讨论当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，分别求出 BC 的长和 $\triangle BCQ$ 的周长．

【详解】（1）如图：



$\because AP \perp BC$

$\therefore AP^2 = AB^2 - BP^2$， $AP^2 = AC^2 - CP^2$，

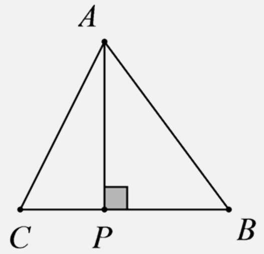
设 $CP = x$， 则 $BP = BC - PC = 25 - x$

$\therefore (10\sqrt{5})^2 - x^2 = 25^2 - (25 - x)^2$，

解得： $x = 10$

$\therefore AP = \sqrt{25^2 - (25 - 10)^2} = 20$

（2）①当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，



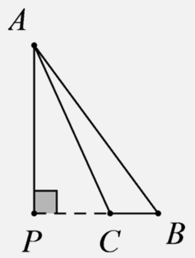
当 $AP = 20$ 时，

$BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$；

$CP = \sqrt{AC^2 - AP^2} = \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - 20^2} = 10$；

$\therefore BC = BP + PC = 25$

当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，如图：



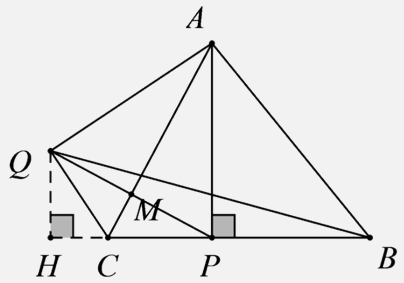
$\because AB = 25 > AC = 10\sqrt{5}$， $AP = 20$

$\therefore PC = \sqrt{AC^2 - AP^2} = 10$， $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = 15$

$\therefore BC = BP - PC = 5$

综上所述： $BC = 25$ 或 5

②当$\triangle ABC$是锐角三角形时，由①知，$AB=BC=25$，$BP=15$，$PC=10$，如图，AC与BP交于M M过Q点作$QH\perp BC$，



由折叠可知：$QC=PC=10$，$PQ\perp AC$，$PQ=2MP$

$\therefore S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}CP\cdot AP=\frac{1}{2}AC\cdot MP$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 10\times 20=\frac{1}{2}\times 10\sqrt{5}\cdot MP$，

$\therefore MP=4\sqrt{5}$，

$\therefore PQ=2MP=8\sqrt{5}$，

设$HC=x$，则$HP=PC+HC=10+x$，

$\because HQ^2=QC^2-HC^2=PQ^2-HP^2$

$\therefore 10^2-x^2=(8\sqrt{5})^2-(10+x)^2$，

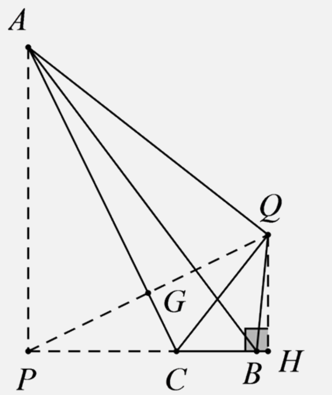
解得：$x=6$，

$HQ=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\therefore BQ=\sqrt{HB^2+HQ^2}=\sqrt{(25+6)^2+8^2}=5\sqrt{41}$

$\therefore \triangle BCQ$的周长为：$BQ+BC+CQ=BQ+BC+PC=5\sqrt{41}+35$

当$\triangle ABC$是钝角三角形时，如图，



同理可得：$CQ=PC=10$，$PQ=2MP=8\sqrt{5}$，$BC=5$，$CQ=PC=10$

设$HC=x$，则$HP=PC+HC=10+x$，

$\because HQ^2 = QC^2 - HC^2 = PQ^2 - HP^2$

$\therefore 10^2 - x^2 = (8\sqrt{5})^2 - (10 + x)^2$，

解得：$x = 6$，

$\therefore HB = CH - CB = 6 - 5 = 1$，$HQ = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$\therefore BQ = \sqrt{HB^2 + HQ^2} = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}$

$\therefore \triangle BCQ$ 的周长为：$BQ + BC + CQ = BQ + BC + PC = \sqrt{65} + 15$

综上所述：$\triangle BCQ$ 的周长为 $5\sqrt{41} + 35$ 或 $\sqrt{65} + 15$．

【点睛】本题考查等积法求高，双勾股定理的求直角三角形边长，解题的关键是在做题时注意分类讨论．

二、勾股定理与网格问题（共 3 小题）

6．(2022 秋·江苏无锡·八年级无锡市天一实验学校校考期中）在 $\triangle ABC$ 中，AB、BC、AC 三边的长分别为 $\sqrt{5}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{13}$，求这个三角形的面积．小明同学在解答这道题时，先画一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1)，再在网格中画出格点 $\triangle ABC$（即 $\triangle ABC$ 三个顶点都在小正方形的顶点处)，如图 1 所示．这样不需求 $\triangle ABC$ 的高，而借用网格就能计算出它的面积．

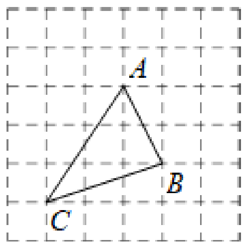


图 1

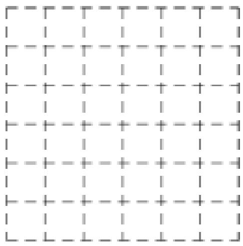
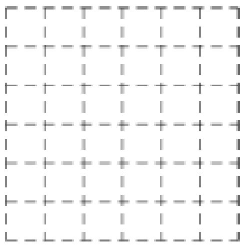
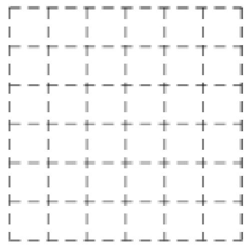


图 2



备用图

(1) $\triangle ABC$ 的面积为______．

(2)若 $\triangle DEF$ 的三边 DE、EF、DF 长分别为 $\sqrt{8}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{17}$，请在图 2 的正方形网格中画出相应的 $\triangle DEF$，并求出 $\triangle DEF$ 的面积为______．

(3)在 $\triangle ABC$ 中，$AB = \sqrt{10}$，$AC = 3$、$BC = 1$，以 AB 为边向 $\triangle ABC$ 外作 $\triangle ABD$（D 与 C 在 AB 异侧)，使 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形，则线段 CD 的长为______．

【答案】(1) $\frac{7}{2}$；

(2)图见解析，5；

(3) $2\sqrt{2}$．

【分析】(1）利用割补法求 $\triangle ABC$ 的面积即可；

（2）利用割补法求 $\triangle DEF$ 的面积即可；

（3）画出符合题意的图形，运用勾股定理即可解决问题．

【详解】(1）解：如图：将 $\triangle ABC$ 填补成梯形 $BCDE$，

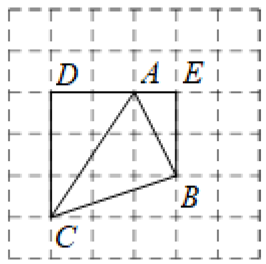


图 1

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(2+3)\times 3-\frac{1}{2}\times 1\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 3=\frac{7}{2}$.

故答案为：$\frac{7}{2}$

（2）解：$\triangle DEF$ 如图所示：

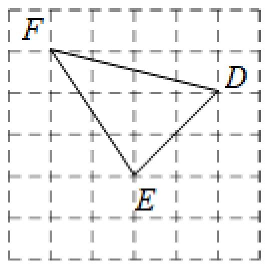


图 2

同（1）中的方法，将 $\triangle DEF$ 填补成梯形 $FGHD$，

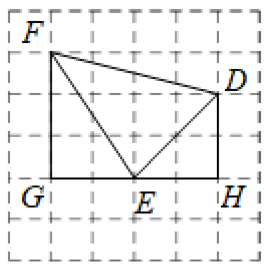


图 2

$\therefore S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times(2+3)\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 3=5$.

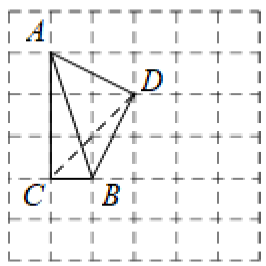
故答案为：5

（3）解：$\because AB=\sqrt{10}$， $AC=3$、 $BC=1$，

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形，

$\because D$ 与 C 在 AB 异侧，

$\therefore$点 D 如图：



此时 $AD=BD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AB^2=AD^2+BD^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$，

$\therefore CD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$．

故答案为：$2\sqrt{2}$

【点睛】本题考查网格问题，解题的关键是掌握割补法求三角形面积，以及勾股定理，结合图形进行求解．

7．（2020 秋·江苏泰州·八年级泰兴市洋思中学校考期中）如图，正方形网格中的每个小正方形边长都是 1，每个小格的顶点叫做格点，以格点为顶点分别按下列要求画三角形（用阴影表示）．

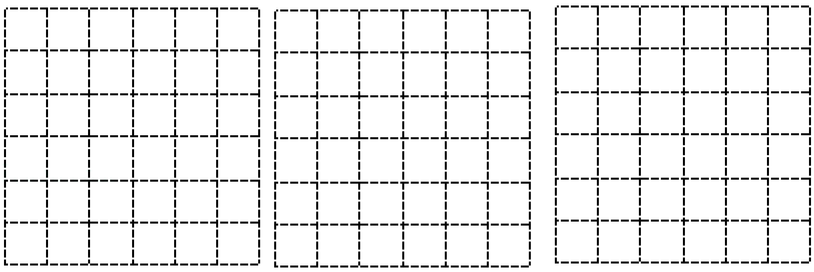


图 a　　图 b　　图 c

（1）在图（a）中，画一个不含直角的三角形，使它的三边长都是有理数；

（2）在图（b）中，画一个直角三角形，使它的斜边长为 $\sqrt{17}$；

（3）在图（c）中，画一个直角三角形，使它的斜边长为 5，直角边长都是无理数．

【答案】（1）见解析；（2）见解析；（3）见解析．

【分析】（1）画一个腰长为 5，底边长为 6 的等腰三角形即可；

（2）画一个直角边长分别是 4 和 1 的直角三角形即可；

（3）画一个直角边长分别是 $\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{20}$ 的直角三角形即可．

【详解】（1）如图（a）中△ABC 即为所求作的图形；

（2）如图（b）中△ABC 即为所求作的图形；

（3）如图（c）中△ABC 即为所求作的图形．

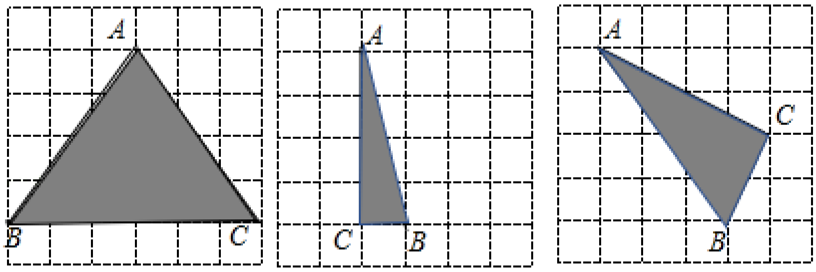


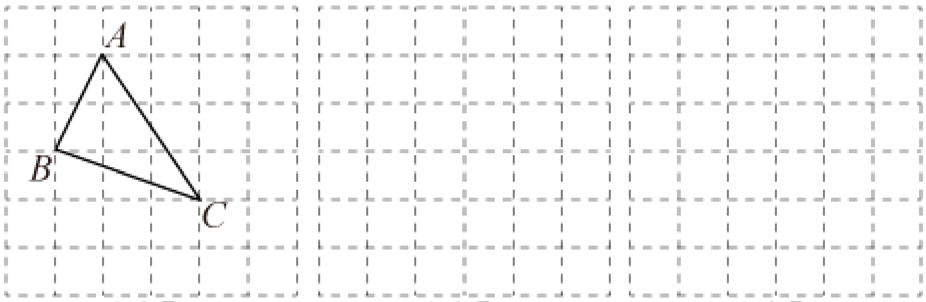
图 a　　图 b　　图 c

【点睛】本题需仔细分析题意，结合图形，利用勾股定理即可解决问题．

8．（2021 秋·江苏南京·八年级统考期中）问题背景：

在△ABC 中，AB、BC、AC 三边的长分别为$\sqrt{5}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{13}$，求这个三角形的面积．小明同学在解答这道题时，先建立一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1），再在网格中画出格点△ABC（即△ABC 三个顶点都在小正方形的顶点处）．如图①所示．这样不需求△ABC 的高，而借用网格就能计算出它的面积．

(1)请你将△ABC 的面积直接填写在横线上_；



图①　　图②　　图③

思维拓展：

(2)我们把上述求△ABC 面积的方法叫做构图法．若△ABC 三边的长分别为$\sqrt{2}$、$\sqrt{13}$、$\sqrt{17}$，请利用图②的正方形网格（每个小正方形的边长为 1）画出相应的△ABC．并求出它的面积．

探索创新：

(3)若△ABC 三边的长分别为$\sqrt{5}\,a$、$2\sqrt{2}\,a$、$\sqrt{17}\,a$（$a>0$），请利用图③的正方形网格（每个小正方形的边长为 a）画出相应的△ABC，并求出它的面积．

(4)若△ABC 三边的长分别为$\sqrt{m^2+16n^2}$、$\sqrt{9m^2+4n^2}$、$2\sqrt{m^2+n^2}$（$m>0$，$n>0$，且 $m\neq n$），试运用构图法求出这个三角形的面积．

【答案】(1)$\frac{7}{2}$

(2)$S_{\Delta ABC}=\frac{5}{2}$，图见解析

(3)$S_{\Delta ABC}=3a^2$，图见解析

(4)$S_{\Delta ABC}=5mn$，图见解析

【分析】（1）利用分割法求三角形的面积即可；

（2）利用网格图，构造三角形，利用分割法求解即可；

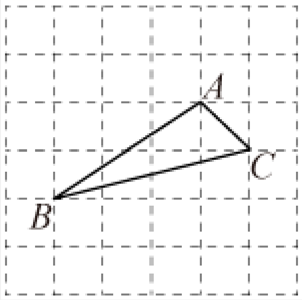
（3）利用网格图，构造三角形，利用分割法求解即可；

（4）构造长方形，利用分割法求解即可．

【详解】（1）解： $S_{\triangle}ABC=3\times3-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{7}{2}$．

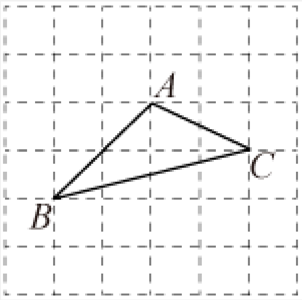
故答案为：$\frac{7}{2}$；

（2）解：如图，$\triangle ABC$ 如图所示．



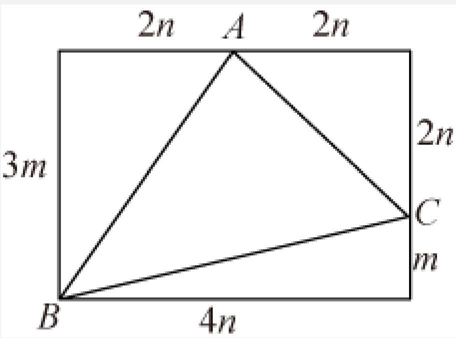
$S_{\triangle}ABC=2\times4-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times4\times1-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{5}{2}$．

（3）解：如图，$\triangle ABC$ 即为所求．



$S_{\triangle}ABC=2a\times4a-\frac{1}{2}\times2a\times2a-\frac{1}{2}\times2a\times a-\frac{1}{2}\times4a\times a=3a^2$．

（4）解：根据题意，构造长为 $2n$，宽为 $3m$ 的长方形，作出边长为为 $\sqrt{m^2+16n^2}$ 、 $\sqrt{9m^2+4n^2}$ 、$2\sqrt{m^2+n^2}$ 的三角形，如图，$\triangle ABC$ 即为所求．

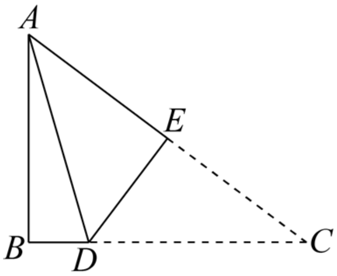


$S_{\triangle}ABC=3m\times4n-\frac{1}{2}\times3m\times2n-\frac{1}{2}\times2m\times2n-\frac{1}{2}\times4n\times m=5mn$．

【点睛】本题是四边形的综合题，考查了勾股定理及作图的知识，解答本题关键是仔细理解问题背景，熟练掌握勾股定理，关键是结合网格用矩形及容易求得面积的直角三角形表示出所求三角形的面积进行解答.

三、利用勾股定理解决直角三角形相关问题（共5小题）

9．（2022秋·江苏徐州·八年级统考期末）如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=6$，$BC=8$，将$\triangle DCE$沿DE翻折，使点C落在点A处.



(1)设$BD=x$，在$Rt\triangle ABD$中，根据勾股定理，可得关于x的方程______；

(2)分别求DC、DE的长.

【答案】(1)$6^2+x^2=(8-x)^2$

(2)$DC=\frac{25}{4}$，$DE=\frac{15}{4}$

【分析】（1）由折叠的性质得出$AD=CD$，$AE=EC$，设$BD=x$，则$DC=AD=8-x$，由勾股定理可求出答案；

（2）由勾股定理可求出答案.

【详解】（1）解：∵将$\triangle DCE$沿DE翻折，使点C落在点A处.

$\therefore AD=CD$，$AE=EC$，

设$BD=x$，则$DC=AD=8-x$，

$\because AB^2+BD^2=AD^2$，

$\therefore 6^2+x^2=(8-x)^2$，

故答案为：$6^2+x^2=(8-x)^2$；

（2）解：由（1）得$6^2+x^2=(8-x)^2$，

解得$x=\frac{7}{4}$，

$\therefore BD=\frac{7}{4}$，

$\therefore DC=BC-BD=8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$.

$\because AB=6$，$BC=8$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\therefore CE=\frac{1}{2}AC=5$，

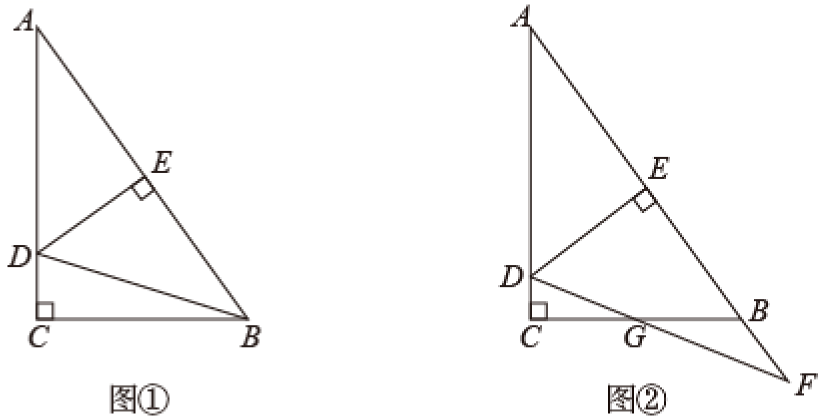
$\therefore DE=\sqrt{DC^2-CE^2}=\sqrt{(\frac{25}{4})^2-5^2}=\frac{15}{4}$．

【点睛】本题考查了折叠的性质，勾股定理，熟练掌握折叠的性质是解题的关键．

10．（2022秋·江苏苏州·八年级苏州高新区第二中学校考期中）如图Rt△*ABC*中，∠*C*＝90°，*AC*＝8，*BC*＝6，沿*AB*的垂线*DE*折叠△*ABC*,

（1）如图①，若点*A*落在点*B*处，求*AD*的长；

（2）如图②，若点*A*落在*AB*的延长线的点*F*处，*AD*折叠后与*CB*交点*G*，且*CG*＝*BG*，求*AD*的长．



【答案】（1）$\frac{25}{4}$；（2）$\frac{57}{8}$

【分详】（1）由勾股定理求出*AB*的长度，设*AD*＝*x*，则*CD*＝8－*x*，由折叠可知*DB*＝*AD*＝*x*，在Rt△*DCB*中， $CD^2+BC^2=DB^2$，列式计算求出*x*的值即可；

（2）过点*B*作*BH*⊥*BC*交*DF*于点*H*，由全等三角形的判定得△*DGC*≌△*HBG*，由全等三角形的性质得*DC*＝*BH*，∠*CBH*＝∠*DCB*，由平行线的判定得*AC*//*BH*及∠*A*＝∠*HBF*，由折叠知∠*A*＝∠*F*，得∠*HBF*＝∠*F*，*HB*＝*HF*．设*CD*＝*y*，则*AD*＝*DF*＝8－*y*，*HF*＝*y*，在Rt△*DCG*中， $CD^2+GC^2=DG^2$，列式计算即可求出*AD*的长

【详解】解：（1）∵Rt△*ABC*中，∠*C*＝90°，*AC*＝8，*BC*＝6，

∴*AB*＝10．

设*AD*＝*x*，则*CD*＝8－*x*，由折叠可知*DB*＝*AD*＝*x*．

在*Rt*△*DCB*中， $CD^2+BC^2=DB^2$，$(8-x)^2+6^2=x^2$，

解得$x=\frac{25}{4}$，*AD*的长为$\frac{25}{4}$；

（2）过点*B*作*BH*⊥*BC*交*DF*于点*H*.

在△*DGC*与△*HBG*中，

∵∠*DCB*＝∠*HBG*，∠*DGC*＝∠*BGH*，*CG*＝*BG*，

∴△*DGC*≌△*HBG*．

∴$DC=BH$，$DG=GH$，$\angle CBH=\angle DCB$，

∴ $AC//BH$．

∴$\angle A=\angle HBF$．

由折叠可知$\angle A=\angle F$，

∴$\angle HBF=\angle F$．

∴$HB=HF$．

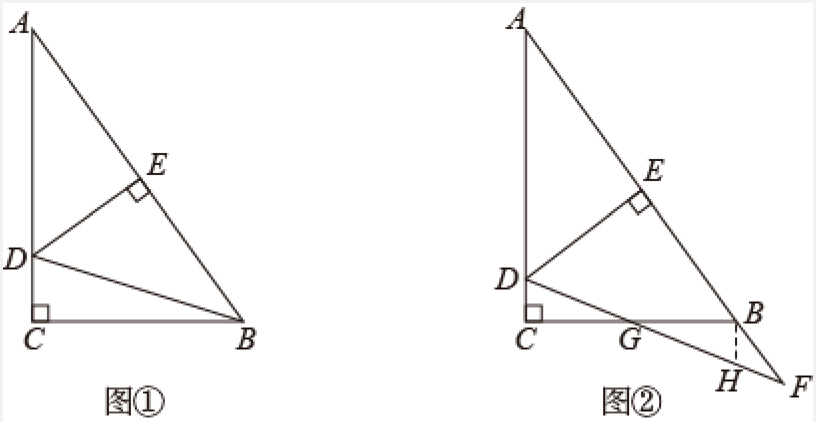
设 $CD=y$，则 $AD=DF=8-y$，$HF=y$，

∴$DG=\frac{1}{2}DH=\frac{1}{2}(8-y-y)=4-y$，

在 $Rt\triangle DCG$ 中， $CD^2+GC^2=DG^2$，$y^2+3^2=(4-y)^2$，

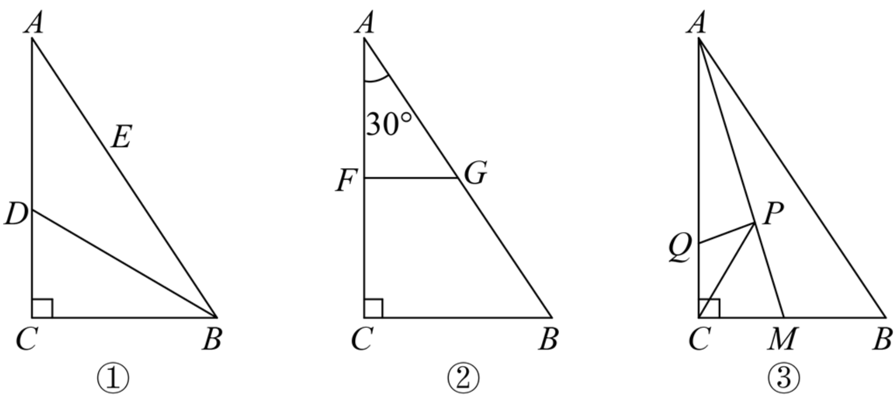
解得 $y=\frac{7}{8}$，

∴$AD=8-y=\frac{57}{8}$，即 AD 的长为$\frac{57}{8}$．



【点睛】本题考查了全等三角形的性质和判定，折叠的性质，勾股定理，利用勾股定理列出方程是本题的关键．

11．（2022 秋·江苏徐州·八年级统考期中）如图，在$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$．



(1)如图①，现将$\triangle ABC$ 沿 BD 翻折，使点 C 落在斜边 AB 上点 E 处，若 $AC=8\text{cm}$，$BC=6\text{cm}$，求 CD 的长；

(2)如图②，现将$\triangle ABC$ 沿直线 FG 翻折，使点 A 落在点 C 处，若 $\angle A=30^\circ$，求证：$AB=2BC$；

(3)如图③，作 AM 平分$\angle BAC$，动点 P 在 AM 上运动，动点 Q 在 AC 上运动，若 $\angle A=30^\circ$，$AC=6\text{cm}$，则

$CP+PQ$ 的最小值为________cm.

【答案】(1)3cm

(2)证明见解析

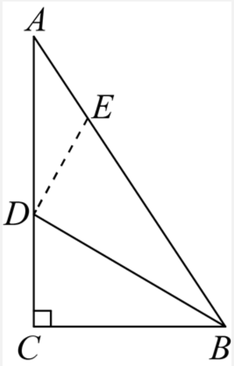
(3)3

【分析】（1）设 $CD=x\text{cm}$，由翻折性质可表示出 AD，DE，计算得出 $AE=4\text{cm}$，在直角三角形 ADE 中，根据勾股定理列出方程，进而求得结果；

（2）根据题意及翻折性质可证得 $\triangle BCG$ 是等边三角形，从而得出结论；

（3）作点 $CC'\perp AM$，交 AB 于 C'，交 AM 于 D，作 $C'Q\perp AC$ 与 Q，交 AM 于 P，由“将军饮马”模型可知此时 $CP+PQ$ 最小，可证得 $\triangle ACD\cong \vee AC'D$，$CD=CD'$，$AC'=AC=6\text{cm}$，可求得 $QC'=\frac{1}{2}AC'=3\text{cm}$，进一步得出结果.

【详解】（1）解：设 $CD=x\text{cm}$，则 $AD=AC-CD=(8-x)\text{cm}$，连接 DE，



由折叠可得，$\angle AED=\angle BED=\angle C=90^\circ$，$DE=CD=x$，$BE=BC=6$，

$\because \angle ACB=90^\circ$，$AB=8\text{cm}$，$BC=6\text{cm}$，

$\therefore AB=10\text{cm}$，

$\therefore AE=AB-BE=10-6=4\text{cm}$，

在 Rt$\triangle ADE$ 中，由勾股定理得 $AD^2-DE^2=AE^2$，

$\therefore (8-x)^2-x^2=4^2$，解得 $x=3$，

$\therefore CD=3\text{cm}$；

（2）证明：连接 CG，如图 1 所示：

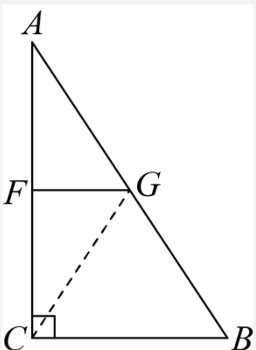


图1

由折叠知，$\angle FCG=\angle A=30^{\circ}$， $CG=AG$，

$\because \angle ACB=90^{\circ}$，

$\therefore \angle B=90^{\circ}-\angle A=60^{\circ}$， $\angle BCG=90^{\circ}-\angle FCG=60^{\circ}$，

$\therefore \triangle BCG$是等边三角形，

$\therefore BC=CG=BG$，

$\therefore BG=AG$，

$\therefore AB=2AG=2BG=2BC$；

（3）解：作点$CC'\perp AM$，交AB于C'，交AM于D，作$C'Q\perp AC$与Q，交AM于P，如图 2 所示：

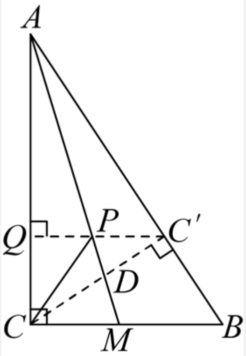


图2

由“将军饮马”模型，结合对称性可知$CP+PQ$最小值为线段QC'长，

$\therefore \angle ADC=\angle ADC'=90^{\circ}$，

$\because AM$ 平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle CAM=\angle BAM$，

$\because AD=AD$，

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle AC'D(\text{ASA})$，

$\therefore CD=CD'$， $AC'=AC=6\text{cm}$，

$\therefore PC=PC'$，

$\therefore CP+PQ=PC'+PQ=QC'$，

$\because \angle ACB=30^{\circ}$，

$\therefore QC'=\frac{1}{2}AC'=3\text{cm}$，

$\therefore CP+PQ$的最小值为$QC'=3\text{cm}$，

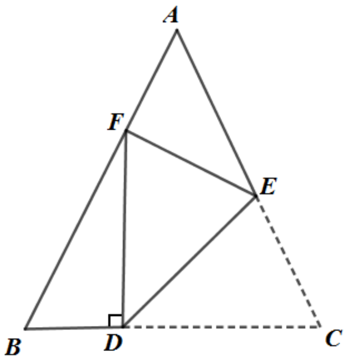
故答案为：3．

【点睛】本题考查了勾股定理，直角三角形性质，等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，轴对称的性质等解决问题的关键是熟练掌握“将军饮马”等模型．

12．（2021 秋·江苏徐州·八年级统考期中）如图，折叠等腰三角形纸片 *ABC*，使点 *C* 落在边 *AB* 上的点 *F* 处，折痕为 *DE*．已知 *AB*＝*AC*，*FD*⊥*BC*．

（1）求证：∠*AFE*＝90°；

（2）如果 $AF=3$，$BF=6$，求 AE 的长.



【答案】（1）见解析；（2）5

【分析】（1）根据折叠性质和等腰三角形性质得出∠B=∠C=∠EFD，再根据直角三角形的两锐角互余解答即可；

（2）根据折叠性质和勾股定理解答即可.

【详解】解：（1）由折叠性质，$\angle C=\angle EFD$，$EF=CE$，

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C=\angle EFD$，

$\because FD\perp BC$，

$\therefore \angle B+\angle BFD=90°$，

$\therefore \angle EFD+\angle BFD=90°$，

$\therefore \angle AFE=180°-\angle EFD-\angle BFD=90°$；

（2）$\because AF=3$，$BF=6$，$AB=AC$，

$\therefore AC=AB=3+6=9$，

$\therefore EF=CE=AC-AE=9-AE$，

在 Rt$\triangle AFE$ 中，$AF^2+EF^2=AE^2$，

$\therefore 3^2+(9-AE)^2=AE^2$，

解得：$AE=5$.

【点睛】本题考查折叠性质、等腰三角形的性质、直角三角形的两锐角互余、勾股定理，熟练掌握折叠性质和等腰三角形的性质，利用勾股定理建立方程思想是解答的关键.

13.（2020 秋·江苏无锡·八年级统考期中）小王剪了两张直角三角形纸片，进行了如下的操作：

操作一：如图 1，将 Rt$\triangle ABC$ 沿某条直线折叠，使斜边的两个端点 A 与 B 重合，折痕为 DE.

（1）如果 $AC=6$cm，$AB=10$cm，可求得$\triangle ACD$ 的周长为_____cm；

（2）如果$\angle CAD$：$\angle BAD=1$：4，可求得$\angle B$ 的度数为_____；

操作二：如图 2，小王拿出另一张 Rt$\triangle ABC$ 纸片，将直角边 AC 沿直线 AD 折叠，使它落在斜边 AB 上，且与 AE 重合，若 $AC=9$cm，$AB=15$cm，请求出 CD 的长.

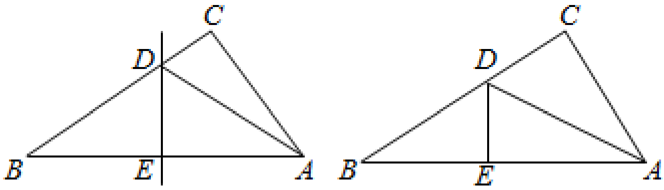


图1　图2

【答案】操作一：（1）14；（2）40°；操作二：4.5cm．

【分析】操作一：（1）先根据勾股定理求出 $BC=8cm$，再由折叠的性质得 $AD=BD$，即可得出结论；

（2）设∠$CAD=x$，则∠$BAD=4x$，进而判断出∠$B=$∠$BAD=4x$，最后用直角三角形的两锐角互余建立方程，求解即可得出结论；

操作二：先由折叠得出 $AE=AC=9cm$，设出 $CD=xcm$，进而得出 $BD=$（$12-x$）cm，$DE=xcm$，最后用勾股定理建立方程求解，即可得出结论．

【详解】解：操作一：

（1）在 Rt△ABC 中，$AC=6cm$，$AB=10cm$，

∴$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$（$cm$），

∵折叠，

∴$AD=BD$，

∴△ACD 的周长$=AC+CD+AD$

$=AC+CD+BD$

$=AC+BC$

$=8+6$

$=14$（cm）；

故答案为：14cm；

（2）设∠$CAD=x$，则∠$BAD=4x$，

∵折叠，

∴$AD=BD$，

∴∠$B=$∠$BAD=4x$，

∵∠$C=90°$，

∴∠$B+$∠$BAC=90°$，

∴$4x+4x+x=90°$，

∴$x=10°$，

∴∠$B=40°$；

故答案为：40°；

操作二：

∵在 Rt△ABC 中，$AC=9cm$，$AB=15cm$，

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12$（$cm$），

$\because$折叠，

$\therefore AE=AC=9$（cm），

$\because AB=15cm$，

$\therefore BE=AB-AE=6$（cm），

设 $CD=xcm$，则 $BD=$（$12-x$）cm，

$\because$折叠，

$\therefore DE=CD=xcm$，

$\because$在 Rt$\triangle BDE$ 中，$DE^2+BE^2=BD^2$，

$\therefore x^2+6^2=(12-x)^2$，

$\therefore x=4.5$，

$\therefore CD=4.5cm$．

【点睛】此题是几何变换综合题，主要考查了折叠的性质，勾股定理，等腰三角形的性质，掌握折叠的性质是解本题的关键．

四、探索勾股定理的证明方法（共 3 小题）

14．（2023 秋·江苏扬州·八年级统考期末）勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图 1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今．

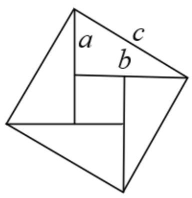


图1

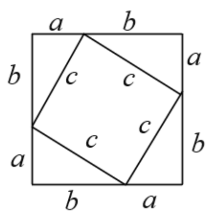


图2

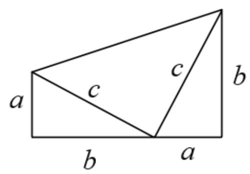


图3

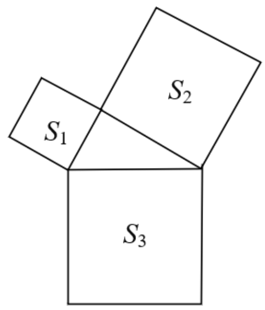


图4

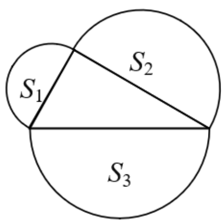


图5

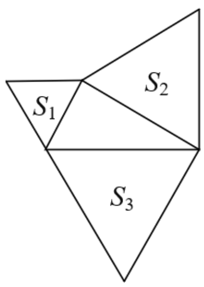


图6

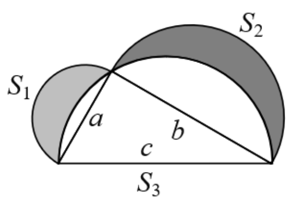


图7

(1)①勾股定理的证明，人们已经找到了 400 多种方法，请从下列几种常见的证明方法中任选一种来证明该定理（以下图形均满足证明勾股定理所需的条件）；

②如图 1，大正方形的面积是 17，小正方形的面积是 5，如果将如图 1 中的四个全等的直角三角形按如图 2

的形式摆放，求图 2 中最大的正方形的面积.

(2)如图 4、5、6，以直角三角形的三边为边或直径，分别向外部作正方形、半圆、等边三角形，这三个图形中面积关系满足 $S_1+S_2=S_3$ 的有______个；

(3)如图 7 所示，分别以直角三角形三边为直径作半圆，设图中两个月形图案（图中阴影部分）的面积分别为 S_1、S_2，直角三角形面积为 S_3，请判断 S_1、S_2、S_3 的关系______.

【答案】(1)①见解析；②29

(2)3

(3) $S_1+S_2=S_3$

【分析】（1）①将图中各个几何图形的面积用两种方法表示出来，再利用面积相等列等式证明即可；②图 1 中：$a^2+b^2=c^2=17$，$(b-a)^2=5$，即可得 $2ab=12$，图 2 中大正方形的面积为：$(a+b)^2$，据此即可作答；

（2）根据题意得：$a^2+b^2=c^2$，再分别计算正方形、半圆形和等边三角形的面积，即可完成求解；

（3）结合题意，首先分别以 a 为直径的半圆面积、以 b 为直径的半圆面积、以 c 为直径的半圆面积、三角形的面积，根据图形特点表示出（S_1+S_2），结合勾股定理，即可得到答案.

【详解】（1）①证明：

在图 1 中，大正方形的面积等于四个全等的直角三角形的面积与中间小正方形面积的和.

即 $c^2=\frac{1}{2}ab\cdot 4+(b-a)^2$，化简得 $a^2+b^2=c^2$.

在图 2 中，大正方形的面积等于四个全等的直角三角形的面积与中间小正方形面积的和.

即 $(a+b)^2=c^2+\frac{1}{2}ab\cdot 4$，化简得 $a^2+b^2=c^2$.

在图 3 中，梯形的面积等于三个直角三角形的面积的和.

即 $\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}ab\cdot 2+\frac{1}{2}c^2$，化简得 $a^2+b^2=c^2$.

②在图 1 中：$a^2+b^2=c^2=17$，$(b-a)^2=5$，

图 2 中大正方形的面积为：$(a+b)^2$，

$\because (b-a)^2=5$，$a^2-2ab+b^2=5$，

$\therefore 17-2ab=5$，$2ab=12$，

$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2=17+12=29$，

∴图 2 中大正方形的面积为 29.

（2）根据题意得：$a^2+b^2=c^2$，

如图 4：

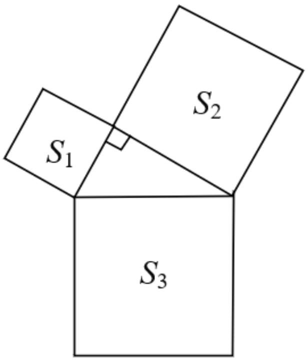


图4

即有：$S_1=a^2$，$S_2=b^2$，$S_3=c^2$，

$\therefore S_1+S_2=S_3$；

如图 5：

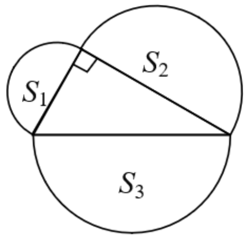


图5

$S_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi a^2$，$S_2=\frac{1}{8}\pi b^2$，$S_3=\frac{1}{8}\pi c^2$，

$\because \frac{1}{8}\pi a^2+\frac{1}{8}\pi b^2=\frac{1}{8}\pi\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{8}\pi c^2$，

$\therefore S_1+S_2=S_3$；

如图 6：

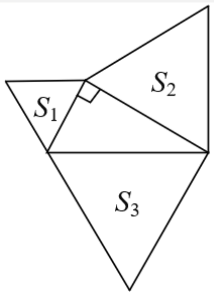
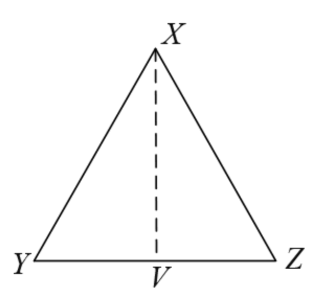


图6

下面推导正三角形的面积公式：

正$\vee XYZ$的边长为 u，过顶点 x 作 $XV\perp YZ$，V 为垂足，如图，



在正$\triangle XYZ$中，有$\angle Y=60^\circ$，$XZ=XY=YZ=u$，

$\because XV\perp YZ$，

$\therefore YV=VZ=\dfrac{1}{2}YZ=\dfrac{1}{2}u$，$\angle XVY=90^\circ$，

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle XYV$中，有$XV=\sqrt{XY^2-YV^2}=\sqrt{u^2-\left(\dfrac{1}{2}u\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}u$，

$\therefore$正$\triangle XYZ$的面积为：$S=\dfrac{1}{2}\times YZ\times XV=\dfrac{\sqrt{3}}{4}u^2$，

$\therefore S_1=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$

$\because\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$

$\therefore S_1+S_2=S_3$；

$\therefore$三个图形中面积关系满足$S_1+S_2=S_3$的有 3 个

故答案为：3；

（3）关系：$S_1+S_2=S_3$，理由如下：

以a为直径的半圆面积为：$\dfrac{1}{2}\times\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}\pi a^2$，

以b为直径的半圆面积为：$\dfrac{1}{2}\times\pi\left(\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}\pi b^2$，

以c为直径的半圆面积为：$\dfrac{1}{2}\times\pi\left(\dfrac{c}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}\pi c^2$，

三角形的面积为：$S_3=\dfrac{1}{2}ab$，

$\therefore S_1+S_2=\dfrac{1}{8}\pi a^2+\dfrac{1}{8}\pi b^2+S_3-\dfrac{1}{8}\pi c^2$，

即：$S_1+S_2=\dfrac{1}{8}\pi\left(a^2+b^2-c^2\right)+S_3$，

结合（1）的结论：$a^2+b^2=c^2$

$\therefore S_1+S_2=S_3$.

【点睛】本题考查了勾股定理、正方形、等边三角形、圆面积计算的知识；解题的关键是熟练掌握勾股定理的性质，从而完成求解．

15．（2022秋·江苏·八年级期中）勾股定理神秘而美妙，它的证法多样，其巧妙各有不同，其中的“面积法”给了小聪以灵感，他惊喜的发现：当两个全等的直角三角形如图1或图2摆放时，都可以用“面积法”来证明，下面是小聪利用图1证明勾股定理的过程：

将两个全等的直角三角形按图1所示摆放，其中$\angle DAB=90^\circ$，求证：$a^2+b^2=c^2$．

证明：连接DB，过点D作$DF\perp BC$交BC的延长线于点F，则$DF=EC=b-a$．

$\because S_{四边形}ADCB=S_{\triangle}ACD+S_{\triangle}ABC=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab$

又$\because S_{四边形}ADCB=S_{\triangle}ADB+S_{\triangle}DBC=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$

$\therefore \frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

请参照上述证法，利用图2完成下面的证明：

将两个全等的直角三角形按图2所示摆放，其中$\angle DAB=90^\circ$．求证：$a^2+b^2=c^2$．

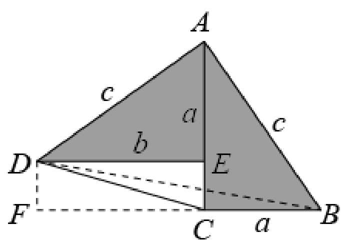


图1

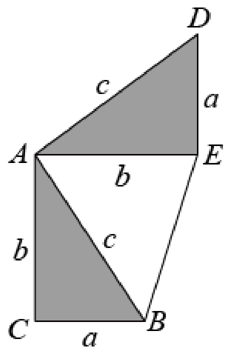
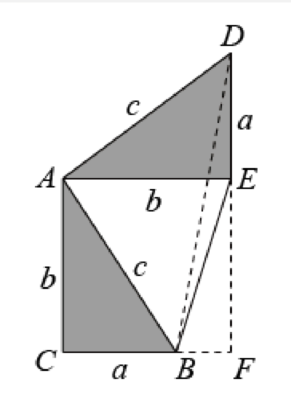


图2

【答案】见解析

【分析】首先连结BD，过点B作DE边上的高BF，则$BF=b-a$，用两种方法表示出$S_{四边形}ADEB$，两者相等，整理即可得证．

【详解】证明：如图，连接BD，过点B作DE边上的高BF，可得$BF=b-a$



$\because S_{\text{四边形}ADEB}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab$，

$\because \angle DAB=90°$,

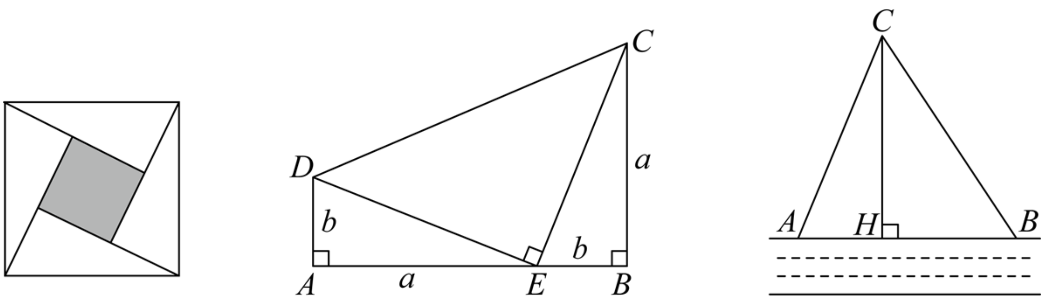
$\therefore S_{\text{四边形}ADEB}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle DEB}=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$

$\therefore \frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

【点睛】本题考查了勾股定理的证明，用两种方法表示出$S_{\text{四边形}ADEB}$是解题的关键.

16.（2022秋·江苏扬州·八年级统考期中）著名的赵爽弦图（如图①，其中四个直角三角形较大的直角边长都为a，较小的直角边长都为b，斜边长都为c），大正方形的面积可以表示为c^2），也可以表示为$4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$，由此推导出重要的勾股定理：如果直角三角形两条直角边长为a，b，斜边长为c，则$a^2+b^2=c^2$.



图①　　图②　　图③

(1)图②为美国第二十任总统伽菲尔德的“总统证法”，请你利用图②推导勾股定理.

(2)如图③，在一条东西走向河流的一侧有一村庄C，河边原有两个取水点A，B，其中$AB=AC$，由于某种原因，由C到A的路现在已经不通，该村为方便村民取水决定在河边新建一个取水点H（A、H、B在同一条直线上），并新修一条路CH，且$CH\perp AB$．测得$CH=1.2$千米，$HB=0.9$千米，求新路CH比原路CA少多少千米？

(3)在第（2）问中若$AB\neq AC$时，$CH\perp AB$，$AC=4$，$BC=5$，$AB=6$，设$AH=x$，求x的值.

【答案】(1)见解析

(2)少0.05千米

(3)$\frac{9}{4}$

【分析】（1）梯形的面积可以由梯形的面积公式求出，也可利用三个直角三角形面积求出，两次求出的面积相等列出关系式，化简即可得证；

（2）设$CA=x$，则$AH=x-0.9$，根据勾股定理列方程，解得即可得到结果；

（3）在$Rt\triangle ACH$和$Rt\triangle BCH$中，由勾股定理得求出$CH^2=CA^2-AH^2=CB^2-BH^2$，列出方程求解即可得到结果.