第一节力矩和角动量

【知识要点】

一、力矩的定义

1.对轴的力矩

对轴的力矩可推动物体绕轴转动或改变物体绕轴转动的角速度.力矩的大小不仅与力的大小和方向有关，而且与力的作用点有关.当力的作用线在垂直于轴的平面（π） 上时（图 5-1-1),力矩 τ 的大小与力的作用点 P 和轴的距离ρ成正比，与力在垂直于ρ方向上的分量 F_ϕ成正比，因为力在ρ方向上的分量 F_ρ对物体的绕轴转动无作用，于是有

$$\tau=\rho F_\phi=F\rho\sin\theta \qquad (5.\ 1\text{-}1)$$

式中 θ 是F 与ρ的夹角， ρ就是从轴与平面π的交点 O’指向 P 点的矢量，由于在力矩作 用下引起的转动有两个可能的方向，力矩也有正、负两种取向.例如，先任意规定轴的正方向，当逆着轴的正方向去看力矩作用下所引起的物体的转动时，若物体沿逆时针方向转动，对应的力矩就取为正，反之为负.由于ρsinθ=d 就是力的作用线与轴的距离，（5. 1-1)式又可写成

$$\tau = Fd \qquad (5.\ 1\text{-}1a)$$

d 常称为力臂，这正是大家所熟知的力矩表达式.

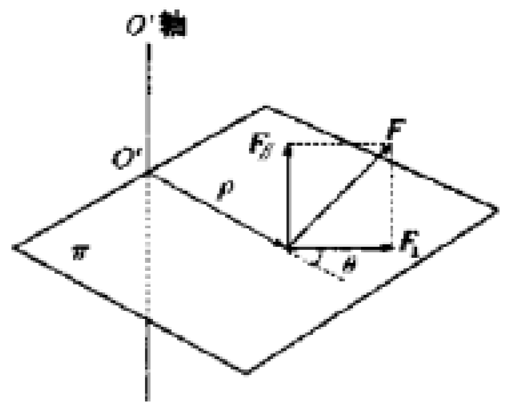


图 5-1-2 任意方向的力对 O'轴的力矩

当力的作用线不在垂直于轴的平面(π)上时，可将力 F 分解为平行于轴的分量 $F_{//}$ 和垂直于轴的分量 $F_{\perp}$ 两部分，其中 $F_{//}$ 对物体绕轴转动不起作用，而 $F_{\perp}$ 就是在垂直于轴的平面（π）上的投影，故这时 F 对轴的力矩可写成

$$\tau = \rho F_{\perp} \sin\theta \qquad (5.1\text{-}1b)$$

这里的 θ 是$F_{\perp}$与ρ的夹角（图 5-1-2).

2.对参考点的力矩

可将上述对轴的力矩的概念推广到对点的力矩.在选定的参照系中，从参考点 O 指向力的作用点 P 的矢量 r 与作用力 F 的矢积称为作用力对于参考点 O 的力矩，即

$$T = r \times F \qquad (5\text{-}1\text{-}2)$$

r 也可称为作用点相对参考点的位矢.当参考点是坐标原点时，r 就是力的作用点的位矢.根据矢积的意义，力矩的大小等于以 r 和F 两矢量为邻边所构成的平行四边形的面积，方向与 r、F 所在平面垂直并与 r、F 成右手螺旋。

二、作用于质点的力矩和作用于质点系的力矩

1.作用于质点的力矩

当质点 m 受力 F 作用时，F 对参考点〇的力矩即为质点受到的力矩，这时力矩表达式(5.1-2)中的 r 就是参考点指质点的矢量，当参考点为坐标原点时，r 就是质点的位矢.当质点受 F_1、F_2、…、F_N N 个力同时作用时，诸力对某参考点的力矩的矢量和等

于合力 $F=F_1+F_2+\cdots+F_N$ 对同一参考点的力矩，即

$$r\times F_1+r\times F_2+\cdots+r\times F_N=r\times(F_1+F_2+\cdots+F_N)=r\times F \qquad (5.1\text{-}3)$$

2. 作用于质点系的力矩

力矩概念也可应用于作用于质点系上的作用力.一般讲来，质点系内各质点受到的作 用力有外力和内力的区别，因此应分别考察外力的力矩和内力的力矩

(1)外力的力矩

当质点系受多个外力作用时，若第 i 个质点受到的合外力为 F_i，该质点相对某一给定参考点的位矢为 r_i，则其力矩为 $\tau_{i外}=r_i\times F_i$，各质点所受力矩的矢量和，即质点系所受的总力矩为 $\tau_{外}=\sum_i\tau_{i外}=\sum_i r_i\times F_i$ （5.1-4）

由于各外力作用在不同质点上，各质点的位矢 r_i 各不相同，因而外力对质点系的总力矩一般不能通过外力矢量和的力矩来计算.

但当质点系处在重力场中时，各质点所受重力与质点的质量成正比，方向又都相同， 因而作用于质点系的重力相对某一参考点的力矩，根据(5.1-4)式为

$$\tau_{重力}=\sum_i r_i \times m_i g=(\sum_i m_i r_i)\times g=r_C \times Mg \qquad （5．1-5）$$

即作用于质点系的重力相对某参考点的力矩等于重力的矢量和作用于质心上时对该参 考点的力矩.在平动非惯性系中的惯性力显然也具有这种性质.

(2)内力的力矩

若 f_i 为作用于质点系中第 i 个质点上的合内力，r_i 为该质点的位矢，则内力的总力矩为

由于内力总是成对出现，因而上式可写成$\tau_{内}=\Sigma_{i\pi j}(r_i \times f_{ji}+r_j \times f_{ij})$

根据牛顿第三定律（强形式），任一对内力 f_{ji} 和 f_{ij} 必定等值反向，且沿同一直线，因而对任一给定参考点 O 来说，力矩也必等值反向，两者相互抵消，即

因而内力的总力矩为零 $\tau_{内}=\Sigma_{i\pi j}(r_i \times f_{ji}+r_j \times f_{ij})=0$ （5．1-6）

这一结果与内力的冲量相似，但与内力的功不同.

三、 冲量矩

在明确了力矩的概念以后，可引出冲量矩的概念.

$\Delta L = \tau\Delta t = (\tau_{外} + \tau_{内})\Delta t = (\tau_{外} + 0)\Delta t = \tau_{外}\Delta t$　　　　(5. 1-7)

此式对质点系适用.

若对质点只需把$\tau_{外}$改为τ即可.

在一段时间内质点或质点系所受的冲量矩为这段时间内冲量矩的累加：

$\Delta L_{总} = \sum \Delta L = \sum \tau_{外}\Delta t$　　　　(5. 1-8)

$\Delta L_{总}$为矢量，方向与$\tau_{外}$相同，单位是N●m●s。

四、　质点的角动量

质点的运动状态可以用动量P=mv描写，它包含了运动的大小和方向的所有特征.当我们以某定点为参考点来考察质点的运动时，相对参考点而言，除质点的动量外，质点的距离在变化，质点的方位也在变化，前者可用质点相对参考点的位矢的大小变化来表征，后者则可用位矢的方向变化来表征，而位矢方向的变化又可与位矢扫过的角度随时间的变化，即角速度相联系，而角速度不仅有大小，还有方向（以所绕的轴线及顺、逆时针为特征）。为了描写质点相对某一参考点的运动，可仿照力矩的定义引人动量矩的概念.从给定参考点指向质点的矢量r和质点动量P=mv的矢积称为质点对于参考点的动量矩，用l表示：l=r×P　　　　(5.1-9)

动量矩又称角动量。

角动量是矢量，它是 r 和 p 的矢积，因而既垂直于 r，又垂直于 P；即垂直于 r 与 P 所组成的平面，其指向由右手定则决定（图 5-1-3).

质点的角动量是相对给定的参考点定义的，因此，同一质点对不同参考点的角动量是不同的。例如，一圆锥摆的摆球以恒定的角速度 ω 作圆周运动，圆周的半径为 R，摆的悬线长为 r（图 5-1-4），摆球对圆心 O 的角动量| l |=mvR== mωR2，其大小和方向都恒 定不变.但摆球对悬挂点 O'的角动量 l'则不同，尽管其大小| l' | =mvr== mωRr 保持不

变，但方向却随时间而变.

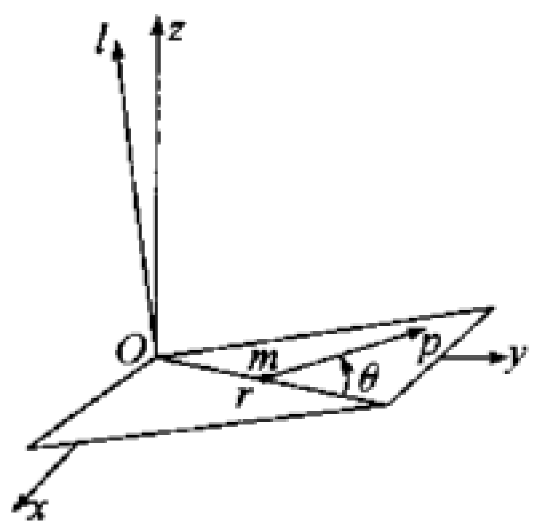


图 5-1-3 质点的角动量

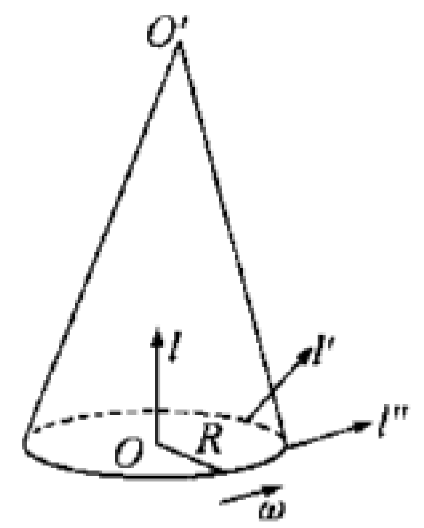


图 5-1-4 角动量与参考点有关

作直线运动的质点，对于不在该直线上的不同参考点的角动量也不相同.

通常把考察转动的参考点取为坐标原点，这样，(5.1-9)式中的 r 就是质点的位矢。

角动量的单位是 kg m2 /s

【例题分析】

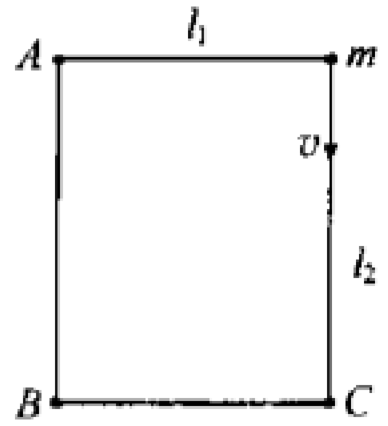


图 5-1-5

例 1　如图 5-1-5 所示，质量为 m 的小球自由落下，某时刻具有速度 v，此时小球与图中的 A、B、C 三点恰好位于某长方形的四个顶点，且小球与A、C 点的距离分别为 l_1、l_2，试求：

(1)小球所受重力相对 A、B、C 三点的力矩 M_1、M_2、M_3；

(2)小球相对 A、B、C 三点的角动量 L_1、L_2、L_3．

解 (1)小球所受重力 mg 竖直朝下，以 A 为参考点的小球位矢 l_1 水平向右，mg 与 l_1 两者夹角 φ =90°，可得

M_1 大小：$M_1=l_1 mg\sin 90^\circ=l_1 mg$

M_1 方向：垂直图平面朝内

以 B 为参考点，小球的位矢 r 是从 B 指向小球所在位置，力臂长 h 即为 B 到 C 的距离 l_1，因此有

M_2 的大小：$M_2=l_1 mg$

M_2 方向：垂直图平面朝内

以 C 为参考点，小球的位矢恰与 mg 反向，即有 180°，因此得

$M_3=0$

(2)小球动量 $P=mv$ 竖直向下，与(1)问解答类似地可得

L_1 的大小：$L_1=l_1 mv\sin 90^\circ=l_1 mv$

L_1 的方向：垂直图平面朝内

L_2 的大小：$L_2=l_1 mv$

L_2 的方向：垂直图平面朝内

$L_3=0$

第二节质点和质点组的角动量

〖知识要点】

一、质点角动量定理

我们知道，质点动量的变化等于外力的冲量，质点的角动量如何随外力变化呢？这

也不难从牛顿运动定律得到.若质点对某一给定参考点的角动量 $l=r\times mv=r\times P$，则其时间变化率为 $\frac{\Delta l}{\Delta t}=\frac{\Delta(r\times P)}{\Delta t}=\frac{\Delta r}{\Delta t}\times P+r\times\frac{\Delta P}{\Delta t}$

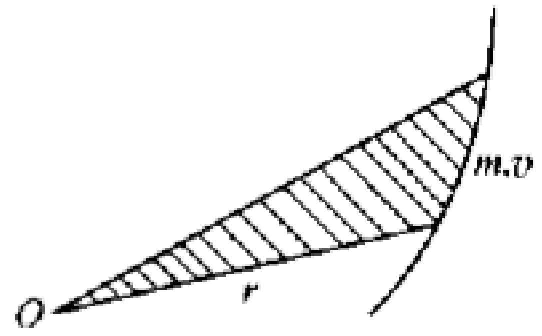
若此给定参考点相对参照系是静止的，则 $\frac{\Delta r}{\Delta t}=v$，$\frac{\Delta r}{\Delta t}\times P=v\times P=v\times mv=0$，而 $\frac{\Delta P}{\Delta t}=F$，

$r\times\frac{\Delta P}{\Delta t}=r\times F$.但力的作用点相对参考点的位矢和力的矢积即为对参考点的力矩 τ，

于是上式又可写为

$$\tau = \frac{\Delta l}{\Delta t} \qquad (5.2\text{-}1)$$

即质点对任一固定点的角动量的时间变化率等于外力对改点的力矩，这就是质点角动量定理。根据第一节（5.1-8）式，得



角动量与面积速度成正比
图 5-2-1

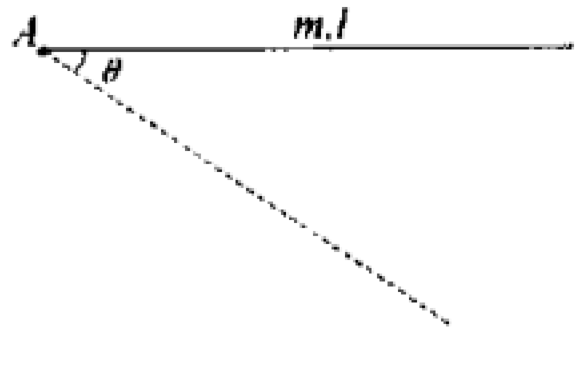
力矩对时间的累加，$\Sigma\tau \bullet \Delta t$ 就是冲量矩。上式表示质点角动量的增量等于外力的冲量矩，这就是质点角动量定理的另一形式.两种形式的角动量定理，都可写成分量形式.

由于$r \times v$在数值上等于以 r 和 v 为邻边的平行四边形的面积，也就是矢径 r 在单位时间内所扫过的面积（面积速度）的两倍，所以角动量 $l = r \times mv$ 与面积速度成正比，为面积速度的 2m 倍(图 5-2-1).

例 2 质量为 m，长 l 的匀质细杆，绕着过杆的端点且与杆垂直的轴以角速度 ω 转动时，它的动能和相对端点的角动量大小分别为

$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$，$L = I\omega$ 其中

$I = \frac{1}{3}ml^2$



今如图 5-1 -6 所示，将此杆从水平位置静止释放， 设

图 5-1-6