专题八　平面向量

一、考试内容：

向量．向量的加法与减法．实数与向量的积．平面向量的坐标表示．线段的定比分点．平面向量的数量积．平面两点间的距离、平移．

二、考试要求：

（1）理解向量的概念，掌握向量的几何表示，了解共线向量的概念．

（2）掌握向量的加法和减法．

（3）掌握实数与向量的积，理解两个向量共线的充要条件．

（4）了解平面向量的基本定理，理解平面向量的坐标的概念，掌握平面向量的坐标运算．

（5）掌握平面向量的数量积及其几何意义，了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题，掌握向量垂直的条件．

（6）掌握平面两点间的距离公式，以及线段的定比分点和中点坐标公式，并且能熟练运用掌握平移公式．

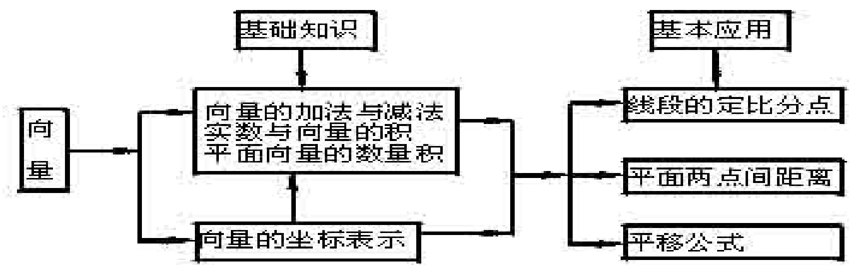
三、命题热点

高考对解析几何的考查主要包括以下内容：平面向量的概念和线性运算、平面向量的数量积、平面向量的应用。虽然该部分内容在试卷中试题数量多、占有的分值较多，但是试题以考查基础为主，试题的难度一般是中等偏下。

在高考中重点考查：平面向量的数量积、平面向量的几何意义等。

四、知识回顾

（一）本章知识网络结构



（二）向量的概念

(1)向量的基本要素：大小和方向．　(2)向量的表示：几何表示法 $\overrightarrow{AB}$；字母表示：$\boldsymbol{a}$；

坐标表示法 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(x,\ y)$．

(3)向量的长度：即向量的大小，记作 $|\boldsymbol{a}|$．

(4)特殊的向量：零向量 $\boldsymbol{a}=0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{a}|=0$．

单位向量 $\boldsymbol{a}_0$ 为单位向量 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{a}_0|=1$．

(5)相等的向量：大小相等，方向相同　$(x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases}$

(6) 相反向量：$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(7)平行向量(共线向量)：方向相同或相反的向量，称为平行向量．记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$．平行向量也称为共线向量．

3.向量的运算

运算类型	几何方法	坐标方法	运算性质

向量的加法	1. 平行四边形法则 2. 三角形法则	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
向量的减法	三角形法则	$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$	$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$
数乘向量	1. $\lambda\vec{a}$ 是一个向量，满足：$\lvert\lambda\vec{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\vec{a}\rvert$ 2. $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向； $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$异向； $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.	$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y)$	$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$
向量的数量积	$\vec{a}\bullet\vec{b}$ 是一个数 1. $\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}$时，$\vec{a}\bullet\vec{b}=0$. 2. $\vec{a}\neq\vec{0}$且$\vec{b}\neq\vec{0}$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos(\vec{a},\vec{b})$	$\vec{a}\bullet\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$	$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\bullet\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\bullet\vec{c}=\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}$ $\vec{a}^2=\lvert\vec{a}\rvert^2$ 即$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ $\lvert\vec{a}\bullet\vec{b}\rvert\leq\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$

4. 重要定理、公式

(1) 平面向量基本定理

$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是同一平面内两个不共线的向量，那么，对于这个平面内任一向量，有且仅有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

(2) 两个向量平行的充要条件

$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(3) 两个向量垂直的充要条件

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(4) 线段的定比分点公式

设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比为 λ，即 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}$ （线段的定比分点的向量公式）

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$（线段定比分点的坐标公式）

当 $\lambda=1$ 时，得中点公式：

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}（\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}）\text{或} \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases}$$

(5)平移公式

设点 $P(x，y)$按向量 $\boldsymbol{a}=（h，k）$平移后得到点 $P'（x'，y'）$，

则 $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \boldsymbol{a}$ 或 $\begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k. \end{cases}$

曲线 $y=f（x）$按向量 $\boldsymbol{a}=（h，k）$平移后所得的曲线的函数解析式为：

$y-k=f（x-h）$

(6)正、余弦定理

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

（7）三角形面积计算公式：

设△ABC 的三边为 a，b，c，其高分别为 h_a，h_b，h_c，半周长为 P，外接圆、内切圆的半径为 R，r.

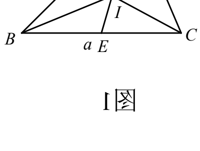
①$S_\triangle=1/2ah_a=1/2bh_b=1/2ch_c$　　②$S_\triangle=Pr$　　③$S_\triangle=abc/4R$

④$S_\triangle=1/2\sin C \cdot ab=1/2ac \cdot \sin B=1/2cb \cdot \sin A$　　⑤$S_\triangle=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$　*[海伦公式]*

⑥$S_\triangle=1/2（b+c-a）r_a$ *[如下图]*$=1/2（b+a-c）r_c=1/2（a+c-b）r_b$

[注]：到三角形三边的距离相等的点有 4 个，一个是内心，其余 3 个是旁心.

如图：



I图

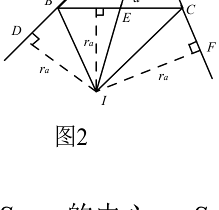


图2

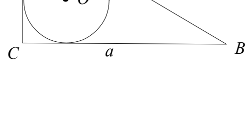


图3

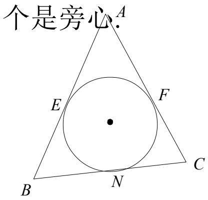


图4

图 1 中的 I 为 $S_{\triangle ABC}$ 的内心，　$S_\triangle=Pr$

图 2 中的 I 为 $S_{\triangle ABC}$ 的一个旁心，$S_\triangle=1/2（b+c-a）r_a$

附：三角形的五个“心”；
重心：三角形三条中线交点.
外心：三角形三边垂直平分线相交于一点.
内心：三角形三内角的平分线相交于一点.
垂心：三角形三边上的高相交于一点.
旁心：三角形一内角的平分线与另两条内角的外角平分线相交一点.

⑸已知⊙O 是△ABC 的内切圆，若 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$ [注：s 为△ABC 的半周长,即 $\frac{a+b+c}{2}$]

则：①$AE=s-a=1/2$（$b+c-a$）
②$BN=s-b=1/2$（$a+c-b$）
③$FC=s-c=1/2$（$a+b-c$）
综合上述：由已知得，一个角的邻边的切线长，等于半周长减去对边（如图 4）.

特例：已知在 Rt△ABC，c 为斜边，则内切圆半径 $r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{ab}{a+b+c}$ （如图 3）.

⑹在△ABC 中，有下列等式成立 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

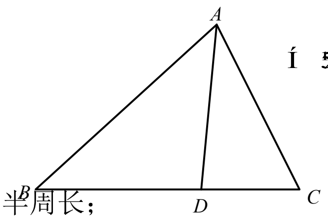
证明：因为 $A+B=\pi-C$,所以 $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$，所以 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$，∴结论！

⑺在△ABC 中，D 是 BC 上任意一点，则 $AD^2=\frac{AC^2BD+AB^2BC}{BC}-BD\cdot DC$.

证明：在△$ABCD$ 中，由余弦定理，有 $AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cos B$□ ①

在△ABC 中，由余弦定理有 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$□ ②，②代入①，化简

可得，$AD^2=\frac{AC^2BD+AB^2BC}{BC}-BD\cdot DC$（斯德瓦定理）



Í 5¼

①若 AD 是 BC 上的中线，$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$；

②若 AD 是∠A 的平分线，$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\cdot p(p-a)}$，其中 p 为半周长；

③若 AD 是 BC 上的高，$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 p 为半周长.

⑻△ABC 的判定：

$c^2=a^2+b^2$ ⇔ △ABC 为直角△ ⇔ ∠A + ∠B $=\frac{\pi}{2}$

c^2 ＜ a^2+b^2 ⇔ △ABC 为钝角△ ⇔ ∠A + ∠B＜ $\frac{\pi}{2}$

c^2 ＞ a^2+b^2 ⇔ △ABC 为锐角△ ⇔ ∠A + ∠B＞ $\frac{\pi}{2}$

附：证明：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，得在钝角△$ABC$ 中，$\cos C$ □ $0\Leftrightarrow a^2+b^2-c^2$ □ $0,\Leftrightarrow a^2+b^2$ □ c^2

⑼平行四边形对角线定理：对角线的平方和等于四边的平方和.

$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

空间向量

1．空间向量的概念：

具有大小和方向的量叫做向量.

注：⑴空间的一个平移就是一个向量.

⑵向量一般用有向线段表示.同向等长的有向线段表示同一或相等的向量.

⑶空间的两个向量可用同一平面内的两条有向线段来表示.

2．空间向量的运算

定义：与平面向量运算一样，空间向量的加法、减法与数乘向量运算如下

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{a}(\lambda\in R)$$

运算律：⑴加法交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

⑵加法结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

⑶数乘分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

3 .共线向量

表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫做共线向量或平行向量．$\vec{a}$平行于$\vec{b}$记作$\vec{a}//\vec{b}$.

当我们说向量$\vec{a}$、$\vec{b}$共线（或$\vec{a}//\vec{b}$）时，表示$\vec{a}$、$\vec{b}$的有向线段所在的直线可能是同一直线，也可能是平行直线．

4．共线向量定理及其推论：

共线向量定理：空间任意两个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$（$\vec{b}\neq\vec{0}$），$\vec{a}//\vec{b}$的充要条件是存在实数λ，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

推论：如果l为经过已知点 **A** 且平行于已知非零向量$\vec{a}$的直线，那么对于任意一点 **O**，点 **P** 在直线l上的充要条件是存在实数 ***t*** 满足等式

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\vec{a}.$$

其中向量$\vec{a}$叫做直线l的方向向量．

5．向量与平面平行：

已知平面α和向量$\vec{a}$，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，如果直线$OA$平行于$\alpha$或在$\alpha$内，那么我们说向量$\vec{a}$平行于平面$\alpha$，记作：$\vec{a}//\alpha$.

通常我们把平行于同一平面的向量，叫做共面向量.

说明：空间任意的两向量都是共面的.

6．共面向量定理：

如果两个向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，$\vec{p}$与向量$\vec{a},\vec{b}$共面的充要条件是存在实数x,y使

$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$．

推论：空间一点 P 位于平面 MAB 内的充分必要条件是存在有序实数对 x,y，使 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$ 或对空间任一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$　　①

①式叫做平面 MAB 的向量表达式．

7．空间向量基本定理：

如果三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\vec{p}$，存在一个唯一的有序实数组 x,y,z，使 $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$．

推论：设 O,A,B,C 是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在唯一的三个有序实数 x,y,z，使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$．

8．空间向量的夹角及其表示：

已知两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记作 $<\vec{a},\vec{b}>$；且规定 $0\le<\vec{a},\vec{b}>\le\pi$，显然有 $<\vec{a},\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>$；若 $<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{2}$，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直，记作：$\vec{a}\perp\vec{b}$.

9．向量的模：

设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，则有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 的长度叫做向量 $\vec{a}$ 的长度或模，记作：$|\vec{a}|$.

10．向量的数量积： $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$.

已知向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 和轴 l，$\vec{e}$ 是 l 上与 l 同方向的单位向量，作点 A 在 l 上的射影 A'，作点 B 在 l 上的射影 B'，则 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上或在 $\vec{e}$ 上的正射影.

可以证明 $\overrightarrow{A'B'}$ 的长度 $|\overrightarrow{A'B'}|=|\overrightarrow{AB}|\cos<\vec{a},\vec{e}>=|\vec{a}\cdot\vec{e}|$.

11．空间向量数量积的性质：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{e}>$．（2）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．（3）$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$．

12．空间向量数量积运算律：

（1）$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$．（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$（交换律）（3）$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$（分配律）.

空间向量的坐标运算

一．知识回顾：

（1）空间向量的坐标：空间直角坐标系的 x 轴是横轴（对应为横坐标），y

轴是纵轴（对应为纵轴），z 轴是竖轴（对应为竖坐标）.

①令 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，则

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$ $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in R)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$ (用到常用的向量模与向量之间的转化：$\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$)

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

②空间两点的距离公式：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

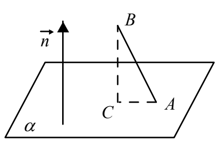
（2）法向量：若向量 $\vec{a}$ 所在直线垂直于平面 α ，则称这个向量垂直于平面 α ，记作 $\vec{a}\perp\alpha$ ，如果 $\vec{a}\perp\alpha$ 那么向量 $\vec{a}$ 叫做平面 α 的法向量.

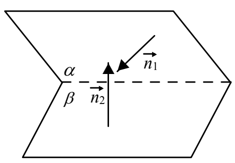
（3）用向量的常用方法：

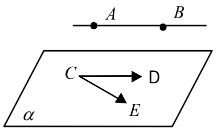
①利用法向量求点到面的距离定理：如图，设 n 是平面 α 的法向量，AB 是平面 α 的一条射线，其中 $A\in\alpha$ ，则点 B 到平面 α 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$.

②利用法向量求二面角的平面角定理：设 $\vec{n_1},\vec{n_2}$ 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 中平面 α,β 的法向量，则 $\vec{n_1},\vec{n_2}$ 所成的角就是所求二面角的平面角或其补角大小（$\vec{n_1},\vec{n_2}$ 方向相同，则为补角，$\vec{n_1},\vec{n_2}$ 反方，则为其夹角）.

③证直线和平面平行定理：已知直线 $a\neq\not\subset$ 平面 α ，$A\cdot B\in a,C\cdot D\in\alpha$ ，且 CDE 三点不共线，则 a∥ α 的充要条件是存在有序实数对 $\lambda\cdot\mu$ 使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$.（常设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$ 求解 λ,μ 若 λ,μ 存在即证毕，若 λ,μ 不存在，则直线 AB 与平面相交）.







五、典型例题

例 1 在下列各命题中为真命题的是(　　)

①若 $\vec{a}=(x_1,y_1)$、$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1y_1+x_2y_2$

②若 A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)，则｜$\overrightarrow{AB}$｜=$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

③若$\vec{a}$=(x_1,y_1)、$\vec{b}$=(x_2,y_2),则$\vec{a}\cdot\vec{b}$=0$\Leftrightarrow$ $x_1x_2+y_1y_2=0$

④若$\vec{a}$=(x_1,y_1)、$\vec{b}$=(x_2,y_2)，则$\vec{a}\perp\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $x_1x_2+y_1y_2=0$

A、①②　　　B、②③　　　C、③④　　　D、①④

解：根据向量数量积的坐标表示；若$\vec{a}$=(x_1,y_1), $\vec{b}$=(x_2,y_2)，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$=$x_1x_2+y_1y_2$，对照命题(1)的结论可知，它是一个假命题、

于是对照选择支的结论、可以排除(A)与(D)，而在(B)与(C)中均含有(3)、故不必对(3)进行判定，它一定是正确的、对命题(2)而言，它就是两点间距离公式，故它是真命题，这样就以排除了(C)，应选择(B)、

说明: 对于命题(3)而言，由于$\vec{a}\cdot\vec{b}$=0$\Leftrightarrow$ $\vec{a}=\vec{0}$ 或$\vec{b}=\vec{0}$ 或$\vec{a}\perp\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $x_1x_2+y_1y_2=0$，故它是一个真命题、

而对于命题(4)来讲，$\vec{a}\perp\vec{b}$ $\Rightarrow$ $x_1x_2+y_1y_2=0$、但反过来，当 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 时，可以是 $x_1=y_1=0$，即$\vec{a}=\vec{0}$，而我们的教科书并没有对零向量是否与其它向量垂直作出规定，因此 $x_1x_2+y_1y_2=0$ $\nRightarrow$ $\vec{a}\perp\vec{b}$)，所以命题(4)是个假命题、

例 2 已知$\vec{a}$=($-\sqrt{3}$,-1), $\vec{b}$=(1, $\sqrt{3}$)，那么$\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角 θ=(　　)

A、30°　　　B、60°　　　C、120°　　　D、150°

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}$=($-\sqrt{3}$,-1)·(1，$\sqrt{3}$)=$-2\sqrt{3}$

｜$\vec{a}$｜=$\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}$=2

｜$\vec{b}$｜=$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$=2

∴cosθ=$\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\bullet|\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

例 3 已知$\vec{a}$=(2,1), $\vec{b}$=(-1,3),若存在向量$\vec{c}$使得：$\vec{a}\cdot\vec{c}$=4, $\vec{b}\cdot\vec{c}$=-9，试求向量$\vec{c}$的坐标、

解：设$\vec{c}$=(x,y),则由$\vec{a}\cdot\vec{c}$=4 可得：

$2x+y=4$；又由$\vec{b}\cdot\vec{c}$=-9 可得：$-x+3y=-9$

于是有：$\begin{cases} 2x+y=4 & (1) \\ -x+3y=9 & (2) \end{cases}$

由(1)+2(2)得 7y=－14,∴y=－2,将它代入(1)可得：x=3

∴$\vec{c}$=(3,－2)、

说明：已知两向量$\vec{a}$，$\vec{b}$可以求出它们的数量积$\vec{a}\cdot\vec{b}$，但是反过来，若已知向量$\vec{a}$及数量积$\vec{a}\cdot\vec{b}$，却不能确定$\vec{b}$、

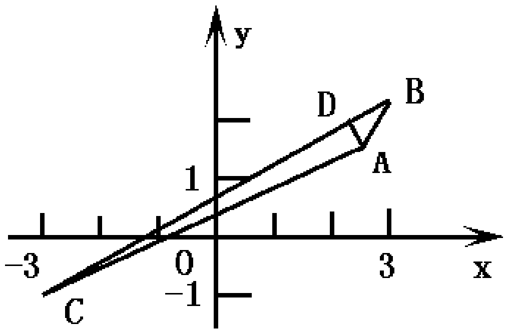
例 4 求向量$\vec{a}$=(1,2)在向量$\vec{b}$=(2，－2)方向上的投影、

解：设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ、

有 cosθ=$\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\bullet|\vec{b}|}=\dfrac{1\times2+2\times(-2)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{2^2+(-2)^2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

∴$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影=｜$\vec{a}$｜cosθ=$\sqrt{5}\times(-\dfrac{\sqrt{10}}{10})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

例 5 已知△ABC 的顶点分别为 A(2，1)，B(3，2)，C(－3，－1)，BC 边上的高 AD，求$\overrightarrow{AD}$及点 D 的坐标、



解：设点 D 的坐标为(x,y)

∵AD 是边 BC 上的高，

∴AD⊥BC，∴$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$

又∵C、B、D 三点共线，

∴$\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{BD}$

又$\overrightarrow{AD}$=(x－2,y－1), $\overrightarrow{BC}$=(－6,－3)

$\overrightarrow{BD}$=(x－3,y－2)

∴$\begin{cases} -6(x-2)-3(y-1)=0 \\ -6(y-2)+3(x-3)=0 \end{cases}$

解方程组，得 $x=\dfrac{9}{5}$,$y=\dfrac{7}{5}$

∴点 D 的坐标为($\dfrac{9}{5}$，$\dfrac{7}{5}$)，$\overrightarrow{AD}$的坐标为($-\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$)

例 6 设向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足：｜$\vec{a}$｜=｜$\vec{b}$｜=1，且$\vec{a}+\vec{b}$=(1，0)，求$\vec{a}$，$\vec{b}$、

解：∵｜$\vec{a}$｜=｜$\vec{b}$｜=1，

∴可设$\vec{a}$=(cosα,sinα), $\vec{b}$ =(cosβ,sinβ)、

∵$\vec{a}+\vec{b}$=(cosα+cosβ,sinα+sinβ)=(1,0)，

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=1 \quad \cdots\cdots (1)\\ \sin\alpha+\sin\beta=0 \quad \cdots\cdots (2)\end{cases}$$

由(1)得：cosα=1－cosβ……(3)

由(2)得：sinα=－sinβ……(4)

∴cosα=1－cosβ=$\frac{1}{2}$

∴sinα=±$\frac{\sqrt{3}}{2}$,sinβ=$\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{cases}\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ \vec{b}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}\text{或}\begin{cases}\vec{a}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ \vec{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}$$

例 7 对于向量的集合 A={$\vec{v}$=(x,y)｜$x^2+y^2\le1$}中的任意两个向量$\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$与两个非负实数 α、β;

求证：向量 α$\overrightarrow{v_1}$+β$\overrightarrow{v_2}$的大小不超过 α+β、

证明：设$\overrightarrow{v_1}$=(x_1,y_1)，$\overrightarrow{v_2}$ =(x_2,y_2)

根据已知条件有：$x^2{}_1+y^2{}_1\le1,x^2{}_2+y^2{}_2\le1$

又因为｜α$\overrightarrow{v_1}$+β$\overrightarrow{v_2}$｜=$\sqrt{(\alpha x_1+\beta x_2)^2(\alpha y_1+\beta y_2)^2}$

$=\sqrt{\alpha^2(x_1{}^2+y_1{}^2)+\beta^2(x_2{}^2+y_2{}^2)+2\alpha\beta(x_1x_2+y_1y_2)}$

其中 $x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{x_1^2+y_1^2}\quad\sqrt{x_2^2+y_2^2}\le1$

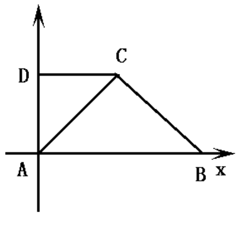
所以｜α$\overrightarrow{v_1}$+β$\overrightarrow{v_2}$｜≤$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}$=｜α+β｜=α+β

例 8 已知梯形 ABCD 中，AB∥CD，∠CDA=∠DAB=90°,CD=DA=$\frac{1}{2}$AB、

求证：AC⊥BC

证明：以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系、如图，设 AD=1

则 A(0，0)、B(2，0)、C(1，1)、D(0，1)



$\therefore \overrightarrow{BC}=(-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,1)$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=-1\times1+1\times1=0$

∴BC⊥AC、

例 9 已知 A(0，a),B(0,b),(0＜a＜b)，在 x 轴的正半轴上求点 C，使∠ACB 最大，并求出最大值、

解，设 C(x,0)(x＞0)

则 $\overrightarrow{CA}=(-x,a)$, $\overrightarrow{CB}=(-x,b)$

则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=x^2+ab$、

$\cos\angle ACB=\dfrac{\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\bullet\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\dfrac{x^2+ab}{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{x^2+b^2}}$

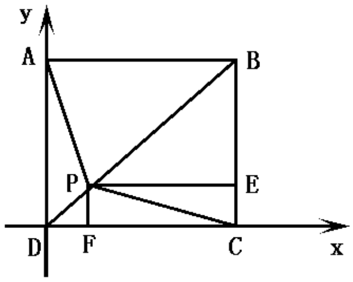
令 $t=x^2+ab$

故 $\cos\angle ACB=\dfrac{1}{\sqrt{-ab(a-b)^2\dfrac{1}{t^2}+(a-b)^2\bullet\dfrac{1}{t}+1}}$

当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2ab}$ 即 $t=2ab$ 时，cos∠ACB 最大值为 $\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$、

当 C 的坐标为($\sqrt{ab}$,0)时，∠ACB 最大值为 $\arccos\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$、

例 10 如图，四边形 ABCD 是正方形，P 是对角线 BD 上的一点，PECF 是矩形，用向量法证明



(1)PA=EF　　(2)PA⊥EF

证明：建立如图所示坐标系，设正方形边长为 1，

$|\overrightarrow{OP}|=\lambda$,则 A(0，1)，P($\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$，$\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$)，E(1，$\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$)，F($\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$，0)

$\therefore \overrightarrow{PA}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)$, $\overrightarrow{EF}=(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)$

(1) $|\overrightarrow{PA}|^2=(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)^2+(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)^2=\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1$

$|\overrightarrow{EF}|^2=(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-1)^2+(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)^2=\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1$

$\therefore |\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{EF}|^2$,故 PA=EF

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/608071060042006102