2024 届辽宁省沈阳市郊联体高三下-第四次考数学试题试卷

注意事项：
1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2．选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0．5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若直线 $2x\square 4y\square m\square 0$ 经过抛物线 $y\square 2x^2$ 的焦点，则 $m\square$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\square\frac{1}{2}$　　C．2　　D．$\square 2$

2．已知定义在 $\square 1,\square\square\square$ 上的函数 $f\square x\square$ 满足 $f\square 3x\square\square 3f\square x\square$，且当 $1\square x\square 3$ 时，$f\square x\square\square 1\square|x\square 2|$，则方程 $f\square x\square\square f\square 2019\square$ 的最小实根的值为（　　）

A．168　　B．249　　C．411　　D．561

3．在 $\square ABC$ 中，"$\cos A\square\cos B$"是"$\sin A\square\sin B$"的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．下列说法正确的是（　　）

A．命题"$\square x_0\square 0$，$2x_0\square\sin x_0$"的否定形式是"$\square x\square 0$，$2x\square\sin x$"

B．若平面 $\square$，$\square$，$\square$，满足 $\square\square\square$，$\square\square\square$ 则 $\square//\square$

C．随机变量 $\square$ 服从正态分布 $N\square 1,\square^2\square$（$\square\square 0$），若 $P(0\square\square\square 1)\square 0.4$，则 $P(\square\square 0)\square 0.8$

D．设 x 是实数，"$x\square 0$"是"$\frac{1}{x}\square 1$"的充分不必要条件

5．设 m,n 是两条不同的直线，$\square,\square$ 是两个不同的平面，下列命题中正确的是（　　）

A．若 $m//\square, m//\square$，则 $\square//\square$　　B．若 $m\square\square$，$m\square n$，则 $n\square\square$

C．若 $m\square\square, m//n$，则 $n\square\square$　　D．若 $\square\square\square, m\square\square$，则 $m//\square$

6．若复数 $z\square(m\square 1)\square\square 2\square m\square i(m\square R)$ 是纯虚数，则 $\left|\frac{6\square 3i}{z}\right|\square$（　　）

A．3　　B．5　　C．$\sqrt{5}$　　D．$3\sqrt{5}$

7．已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} x \geq y, \\ x+y-1 \leq 0, \\ y \geq -1, \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为（　　）

A．2　　　　B．$\dfrac{3}{2}$　　　　C．1　　　　D．0

8．已知复数 $z_1=1+ai\left(a\in R\right)$，$z_2=1-2i$（$i$ 为虚数单位），若 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，则 $a=$（　　）

A．-2　　　　B．2　　　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　　　D．$\dfrac{1}{2}$

9．在满足 $0<x_i<y_i<4$，$x_i^{y_i}=y_i^{x_i}$ 的实数对 $\left(x_i,y_i\right)\left(i=1,2,\cdots,n,\cdots\right)$ 中，使得 $x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}<3x_n$ 成立的正整数 n 的最大值为(　　)

A．5　　　　B．6　　　　C．7　　　　D．9

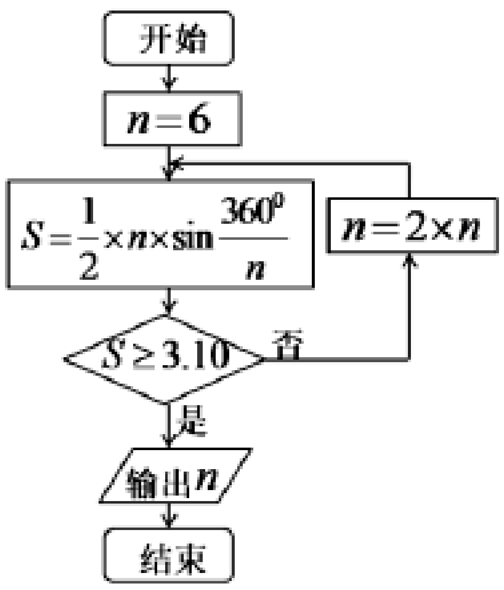
10．已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n=\begin{cases} 2, & n\leq 5 \\ a_1a_2\ldots a_{n-1}-1, & n\geq 6 \end{cases}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$．若正整数 $k(k\geq 5)$ 使得 $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=a_1a_2\ldots a_k$ 成立，则 $k=$（　　）

A．16　　　　B．17　　　　C．18　　　　D．19

11．$(x-1)^3(y-2)^5$ 的展开式中，满足 $m+n=2$ 的 x^my^n 的系数之和为（　　）

A．640　　　　B．416　　　　C．406　　　　D．-236

12．公元 263 年左右，我国数学家刘徽发现当圆内接正多边形的边数无限增加时，多边形面积可无限逼近圆的面积，并创立了“割圆术”，利用“割圆术”刘徽得到了圆周率精确到小数点后两位的近似值 3.14，这就是著名的“徽率”。如图是利用刘徽的“割圆术”思想设计的一个程序框图，则输出的 n 值为（　）（参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.732,\sin 15^{0}\approx 0.2588,\sin 75^{0}\approx 0.9659$）

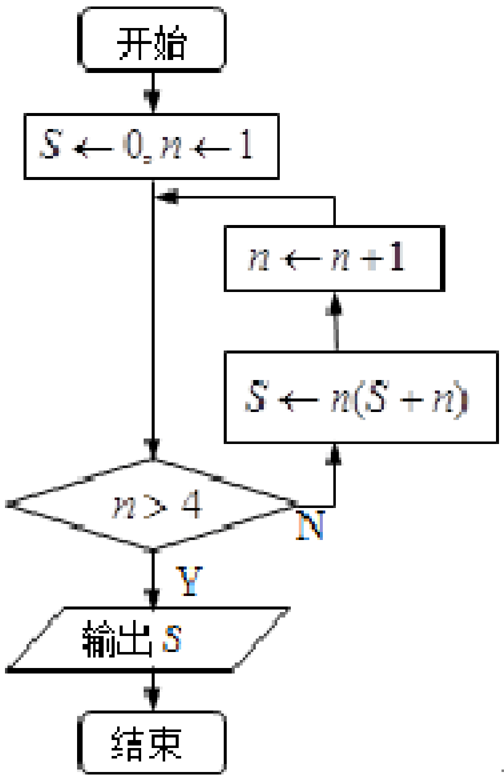


A．48　　　　B．36　　　　C．24　　　　D．12

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1，O_2，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，则该圆柱的表面积为______．

14．执行如图所示的程序框图，则输出的结果是______.



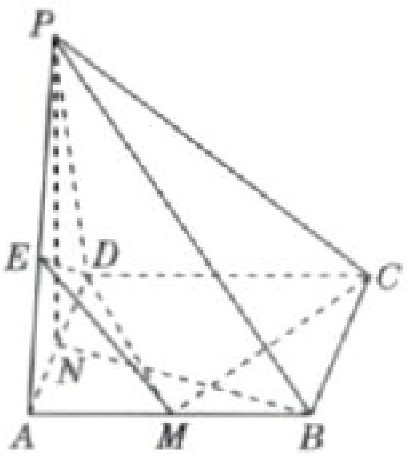
15．执行以下语句后，打印纸上打印出的结果应是：_____.

```
i ← 1
x ← 4
While  i < 10
x ← x + 2i
i ← i + 3
End While
Print  “ x = ”  x
```

16．已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1\ (m>0, n>0)$ 有相同的焦点 F_1、F_2，其中 F_1 为左焦点.点 P 为两曲线在第一象限的交点，e_1、e_2 分别为曲线 C_1、C_2 的离心率，若 $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形，则 e_2-e_1 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 ABCD 是正方形，$\triangle PAD$ 为等边三角形，M，N 分别是 AB，AD 的中点，且平面 $PAD\perp$ 平面 ABCD.



（1）证明：$CM\perp$ 平面 PNB；

（2）问棱 PA 上是否存在一点 E，使 $PC//$ 平面 DEM，求 $\frac{PE}{EA}$ 的值

18.（12 分）$\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最大值，如 $\max\{3,\sqrt{10}\}=\sqrt{10}$，已知函数 $f(x)=\max\{x^2-1, 2\ln x\}$，

$g(x)=\max\left\{x-\ln x, x^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)x+2a^2+4a\right\}$.

（1）设 $h(x)=f(x)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$，求函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上的零点个数；

（2）试探讨是否存在实数 $a\in(-2,+\infty)$，使得 $g(x)>\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，说明理由.

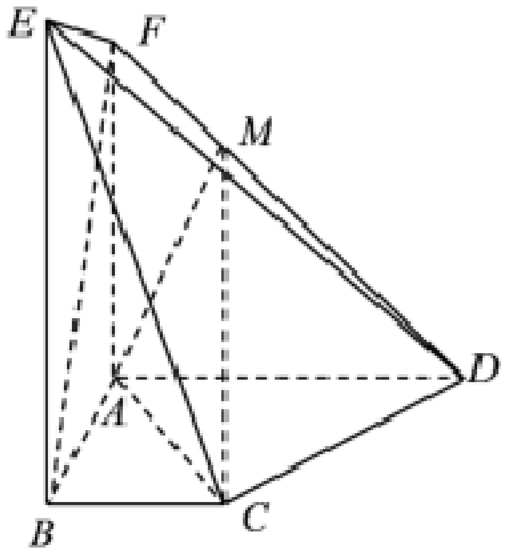
19.（12 分）某景点上山共有 999 级台阶，寓意长长久久. 甲上台阶时，可以一步走一个台阶，也可以一步走两个台阶，若甲每步上一个台阶的概率为 $\frac{1}{3}$，每步上两个台阶的概率为 $\frac{2}{3}$. 为了简便描述问题，我们约定，甲从 0 级台阶开始向上走，一步走一个台阶记 1 分，一步走两个台阶记 2 分，记甲登上第 n 个台阶的概率为 P_n，其中 $n\in N^*$，且 $n\le 998$.

（1）若甲走 3 步时所得分数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）证明：数列 $\{P_{n+1}-P_n\}$ 是等比数列；

（3）求甲在登山过程中，恰好登上第 99 级台阶的概率.

20.（12 分）已知六面体 $ABCDEF$ 如图所示，$BE\perp$ 平面 $ABCD$，$BE/\!/AF$，$AD/\!/BC$，$BC=1$，$CD=\sqrt{5}$，$AB=AF=AD=2$，M 是棱 FD 上的点，且满足 $\frac{FM}{MD}=\frac{1}{2}$.



（1）求证：直线 $BF/\!/$平面 MAC；

（2）求二面角 $A-MC-D$ 的正弦值.

21.（12 分）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2a_n-2$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_2 a_n$，其前 n 项和为 T_n.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=a_n+\frac{1}{T_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 C_n.

22.（10 分）设函数 $f(x)=x\ln x-ae^x, p(x)=kx$，其中 $a\in R, e$ 是自然对数的底数.

（Ⅰ）若 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上存在两个极值点，求 a 的取值范围；

（Ⅱ）若 $\square(x)=\ln x\square 1\square f'(x)$，$\square(1)=e$，函数 $\square(x)$ 与函数 $p(x)$ 的图象交于 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，且 AB 线段的中点为 $P\left(x_0,y_0\right)$，证明：$\square(x_0)\square p(1)\square y_0$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．B

【解题分析】

计算抛物线的交点为 $\left(0,\frac{1}{8}\right)$，代入计算得到答案.

【题目详解】

$y=2x^2$ 可化为 $x^2=\frac{1}{2}y$，焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{8}\right)$，故 $m=\square\frac{1}{2}$.

故选：B．

【题目点拨】

本题考查了抛物线的焦点，属于简单题.

2．C

【解题分析】

先确定解析式求出 $f(2019)$ 的函数值，然后判断出方程 $f\left(x\right)=f\left(2019\right)$ 的最小实根的范围结合此时的 $f(x)=x-3^5$，通过计算即可得到答案.

【题目详解】

当 $x\geq 1$ 时，$f\left(3x\right)=3f\left(x\right)$，所以 $f(x)=3f(\frac{x}{3})=3^2f(\frac{x}{3^2})=\cdots=3^nf(\frac{x}{3^n})$，故当 $3^n\leq x\leq 3^{n+1}$ 时，$\frac{x}{3^n}\in[1,3]$，所以 $f\left(x\right)=3^n\left(1-\left|\frac{x}{3^n}-2\right|\right)=\begin{cases}3^{n+1}-x, & x\geq 2\cdot 3^n\\ x-3^n, & x<2\cdot 3^n\end{cases}$，而

$2019\in[3^6,3^7]$，所以 $f(2019)=3^6\left(1-\left|\frac{2019}{3^6}-2\right|\right)=3^7-2109=168$，又当 $1\le x\le 3$ 时，

$f(x)$ 的极大值为 1，所以当 $3^n\le x\le 3^{n+1}$ 时，$f(x)$ 的极大值为 3^n，设方程 $f(x)=168$

的最小实根为 t，$168\in[3^4,3^5]$，则 $t\in(3^5,\frac{3^5+3^6}{2})$，即 $t\in(243,468)$，此时 $f(x)=x-3^5$

令 $f(x)=x-3^5=168$，得 $t=243+168=411$，所以最小实根为 411.

故选：C.

【题目点拨】

本题考查函数与方程的根的最小值问题，涉及函数极大值、函数解析式的求法等知识，本题有一定的难度及高度，是一道有较好区分度的压轴选这题.

3．C

【解题分析】

由余弦函数的单调性找出 $\cos A<\cos B$ 的等价条件为 $A>B$，再利用大角对大边，结合正弦定理可判断出“$\cos A<\cos B$”是“$\sin A>\sin B$”的充分必要条件.

【题目详解】

∵余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递减，且 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，

由 $\cos A<\cos B$，可得 $A>B$，$\therefore a>b$，由正弦定理可得 $\sin A>\sin B$.

因此，“$\cos A<\cos B$”是“$\sin A>\sin B$”的充分必要条件.

故选：C.

【题目点拨】

本题考查充分必要条件的判定，同时也考查了余弦函数的单调性、大角对大边以及正弦定理的应用，考查推理能力，属于中等题.

4．D

【解题分析】

由特称命题的否定是全称命题可判断选项 A；□，□可能相交，可判断 B 选项；利用正态分布的性质可判断选项 C；$\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow x<0$ 或 $x>1$，利用集合间的包含关系可判断选项 D.

【题目详解】

命题“$\exists x_0>0$，$2x_0<\sin x_0$”的否定形式是“$\forall x>0$，$2x\ge\sin x$”，故 A 错误；□□□，

□□□，则□，□可能相交，故 B 错误；若 $P(0<\xi<1)=0.4$，则 $P(1<\xi<2)=0.4$，所以

$P(\square\square 0)\square\dfrac{1\square 0.4\square 0.4}{2}\square 0.1$，故 $P(\square\square 0)\square 0.9$，所以C错误；由 $\dfrac{1}{x}\square 1$，得 $x\square 0$ 或 $x\square 1$，

故“$x\square 0$”是“$\dfrac{1}{x}\square 1$”的充分不必要条件，D正确.

故选：D.

【题目点拨】

本题考查命题的真假判断，涉及到特称命题的否定、面面相关的命题、正态分布、充分条件与必要条件等，是一道容易题.

5．C

【解题分析】

在A中，□与□相交或平行；在B中，$n//\square$ 或 $n\square\square$；在C中，由线面垂直的判定定理得 $n\square\square$；在D中，m 与□平行或 $m\square\square$.

【题目详解】

设 m,n 是两条不同的直线，□,□是两个不同的平面，则：

在A中，若 $m//\square$，$m//\square$，则□与□相交或平行，故A错误；

在B中，若 $m\square\square$，$m\square n$，则 $n//\square$ 或 $n\square\square$，故B错误；

在C中，若 $m\square\square$，$m//n$，则由线面垂直的判定定理得 $n\square\square$，故C正确；

在D中，若 $\square\square\square$，$m\square\square$，则 m 与□平行或 $m\square\square$，故D错误.

故选C.

【题目点拨】

本题考查命题真假的判断，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，是中档题.

6．C

【解题分析】

先由已知，求出 $m\square\square 1$，进一步可得 $\dfrac{6\square 3i}{z}\square 1\square 2i$，再利用复数模的运算即可

【题目详解】

由z是纯虚数，得 $m\square 1\square 0$ 且 $2\square m\square 0$，所以 $m\square\square 1$，$z\square 3i$.

因此，$\left|\dfrac{6\square 3i}{z}\right|\square\left|\dfrac{6\square 3i}{3i}\right|\square\left|1\square 2i\right|\square\sqrt{5}$.

故选：C.

【题目点拨】

本题考查复数的除法、复数模的运算，考查学生的运算能力，是一道基础题.

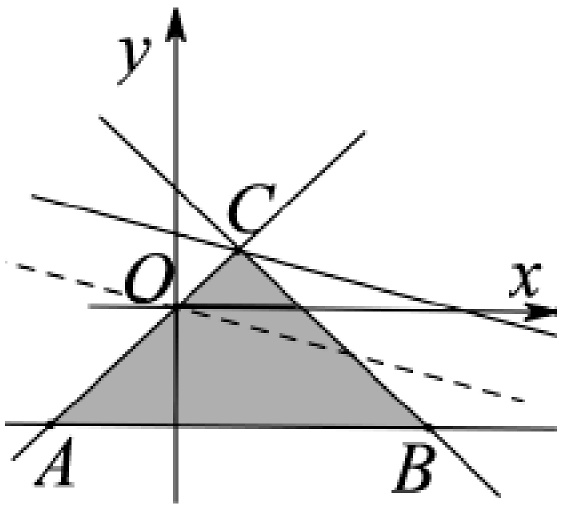
7．B

【解题分析】

作出可行域，平移目标直线即可求解.

【题目详解】

解：作出可行域：



由 $z=x+2y$ 得，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$

由图形知，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 经过点时，其截距最大，此 z 时最大

$\begin{cases} y=x \\ x+y-1=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$，$C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

当 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ 时，$z_{max}=\frac{1}{2}+2\times\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$

故选：B

【题目点拨】

考查线性规划，是基础题.

8．C

【解题分析】

把 $z_1=1+ai\ (a\in R)$，$z_2=1-2i$ 代入 $\frac{z_1}{z_2}$，利用复数代数形式的除法运算化简，由实部为 0 且虚部不为 0 求解即可.

【题目详解】

$\because z_1=1+ai\ (a\in R)$，$z_2=1-2i$，

$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{1+ai}{1-2i}=\frac{(1+ai)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1-2a}{5}+\frac{a+2}{5}i$,

$\because \frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，

$\therefore \begin{cases}1-2a=0\\ a+2\neq 0\end{cases}$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

故选 C.

【题目点拨】

本题考查复数代数形式的除法运算，考查复数的基本概念，是基础题.

9．A

【解题分析】

由题可知：$0<x_i<y_i<4$，且 $x_i^{y_i}=y_i^{x_i}$ 可得 $\frac{\ln x_i}{x_i}=\frac{\ln y_i}{y_i}$，构造函数 $h(t)=\frac{\ln t}{t}\ (0<t<4)$ 求导，通过导函数求出 $h(t)$ 的单调性，结合图像得出 $t_{min}=2$，即 $2<x_i<e$ 得出 $3x_n<3e$，

从而得出 n 的最大值.

【题目详解】

因为 $0<x_i<y_i<4$，$x_i^{y_i}=y_i^{x_i}$

则 $\ln x_i^{y_i}=\ln y_i^{x_i}$，即 $y_i\ln x_i=x_i\ln y_i$

整理得 $\frac{\ln x_i}{x_i}=\frac{\ln y_i}{y_i}$，令 $t=x_i=y_i$，

设 $h(t)=\frac{\ln t}{t}\ (0<t<4)$，

则 $h'(t)=\frac{\frac{1}{t}\cdot t-1\cdot\ln t}{t^2}=\frac{1-\ln t}{t^2}$，

令 $h'(t)>0$，则 $0<t<e$，令 $h'(t)<0$，则 $e<t<4$，

故 $h(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,4)$ 上单调递减，则 $h(e)=\frac{1}{e}$，

因为 $x_i<y_i$，$h(x_i)=h(y_i)$，

由题可知：$h(t)=\frac{1}{4}\ln 4$ 时，则 $t_{min}=2$，所以 $2<t<e$，

所以 $2<x_i<e<y_i<4$，

x 无限接近 e 时，满足条件，所以 x_n □e，

所以要使得 x_1 □x_2 □…□$x_{n□1}$ □3x_n □3e □8.154

故当 x_1 □x_2 □x_3 □x_4 □2 时，可有 x_1 □x_2 □x_3 □x_4 □8 □8.154，

故 n □1 □4，即 n □5，

所以：n 最大值为 5.

故选：A.

【题目点拨】

本题主要考查利用导数求函数单调性、极值和最值，以及运用构造函数法和放缩法，同时考查转化思想和解题能力.

10．B

【解题分析】

由题意可得$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=2$，$a_6=a_1a_2a_3\ldots a_5-1=2^5-1=31$，$n\geqslant6$时，$a_1a_2\ldots a_{n-1}=1+a_n$，将$n$换为$n+1$，两式相除，$a_n^2=a_{n+1}-a_n+1$，$n\geqslant6$，

累加法求得$a_6^2+a_7^2+\ldots+a_k^2=a_{k+1}-a_6+k-5$即有$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=20+a_{k+1}-a_6+k-5=a_{k+1}+k-16$，结合条件，即可得到所求值.

【题目详解】

解：$a_n=\begin{cases}2,n\leqslant5\\a_1a_2\ldots a_{n-1}-1,n\geqslant6\end{cases}(n\in N^*)$，

即$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=2$，$a_6=a_1a_2a_3\ldots a_5-1=2^5-1=31$，

$n\geqslant6$时，$a_1a_2\ldots a_{n-1}=1+a_n$，

$a_1a_2\ldots a_n=1+a_{n+1}$，

两式相除可得$\frac{1+a_{n+1}}{1+a_n}=a_n$，

则$a_n^2=a_{n+1}-a_n+1$，$n\geqslant6$，

由$a_6^2=a_7-a_6+1$，

$a_7^2=a_8-a_7+1$，

…，

$a_k^2=a_{k+1}-a_k+1$，$k\geqslant5$，

可得$a_6^2+a_7^2+\ldots+a_k^2=a_{k+1}-a_6+k-5$

$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=20+a_{k+1}-a_6+k-5=a_{k+1}+k-16$，

且$a_1a_2\ldots a_k=1+a_{k+1}$，

正整数$k(k\geqslant5)$时，要使得$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=a_1a_2\ldots a_k$成立，

$a_{k+1}+k-16=a_{k+1}+1$,

则$k=17$,

故选：B.

【题目点拨】

本题考查与递推数列相关的方程的整数解的求法，注意将题设中的递推关系变形得到新的递推关系，从而可简化与数列相关的方程，本题属于难题.

11．B

【解题分析】

$n\square$ ，有 $\begin{cases} m\square 0 \\ n\square 2\end{cases}$，$\begin{cases} m\square 1 \\ n\square 1\end{cases}$，$\begin{cases} m\square 2 \\ n\square 0\end{cases}$ 三种情形，用 $(x\square 1)^3\square(\square 1\square x)^3$ 中 x^m 的系数乘以 $(y\square 2)^5\square(\square 2\square y)^5$ 中 y^n 的系数，然后相加可得.

【题目详解】

当 $m\square n\square 2$ 时，$(x\square 1)^3(y\square 2)^5$ 的展开式中 $x^m y^n$ 的系数为

$C_3^m x^m(\square 1)^{3\square m}\square C_5^n y^n(\square 2)^{5\square n}\square C_3^n\square C_5^n\square(\square 1)^{8\square(m\square n)}\square 2^{5\square n}x^m y^n\square 2^{5\square n}\square C_3^m\square C_5^n x^m y^n$．当 $m\square 0$，$n\square 2$ 时，系数为

$2^3\square 1\square 10\square 80$；当 $m\square 1$，$n\square 1$ 时，系数为 $2^4\square 3\square 5\square 240$；当 $m\square 2$，$n\square 0$ 时，系数为 $2^5\square 3\square 1\square 96$；故满足

$m\square n\square 2$ 的 $x^m y^n$ 的系数之和为 $80\square 240\square 96\square 416$．

故选：B.

【题目点拨】

本题考查二项式定理，掌握二项式定理和多项式乘法是解题关键.

12．C

【解题分析】

由 $n\square 6$ 开始，按照框图，依次求出 s，进行判断。

【题目详解】

$n\square 6\square s\square\frac{1}{2}\square 6\sin 60^0\square 2.598, n\square 12\square s\square\frac{1}{2}\square 12\sin 30^0\square 3$,

$n\square 24\square s\square\frac{1}{2}\square 24\sin 15^0\square 3.1058$，故选 C.

【题目点拨】

框图问题，依据框图结构，依次准确求出数值，进行判断，是解题关键。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．12□