2024天津中考数学二轮重难题型专题训练

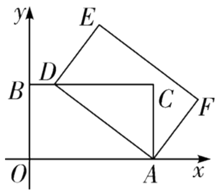
题型七　第24题平面直角坐标系下的图形变化

类型一　旋转问题

典例精讲

例 1　在平面直角坐标系中，四边形$AOBC$是矩形，点$O(0,0)$，点$A(5,0)$，点$B(0,3)$．以点A为中心，顺时针旋转矩形$AOBC$，得到矩形$ADEF$，点O，B，C的对应点分别为D，E，F.

(Ⅰ)如图①，当点D落在BC边上时，求点D的坐标；



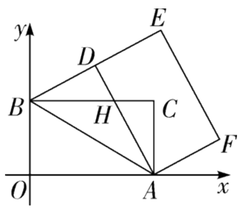
例1题图①

【思维教练】利用勾股定理可以求得CD，进而得到BD，则可求得点D的横坐标，而点D落在BC边上，可求得点D的纵坐标，进而得到点D的坐标

(Ⅱ)如图②，当点D落在线段BE上时，AD与BC交于点H.

①求证：$\triangle ADB\cong\triangle AOB$;

【思维教练】当点D落在线段BE上时，可得$\triangle AOB$和$\triangle ADB$均为直角三角形，进而可得$AD=AO$，$AB=AB$，利用HL即可证得$Rt\triangle ADB\cong Rt\triangle AOB$



例1题图②

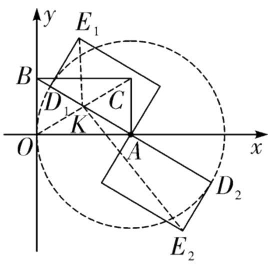
②求点H的坐标；

【思维教练】由①得$\angle BAO=\angle BAD$，而由矩形性质得$\angle CBA=\angle OAB$，进而可得$\angle BAD=\angle CBA$，则$AH=BH$，在$Rt\triangle AHC$中，利用勾股定理列方程即可求出AH的长度，则可得到BH的长度，进而得到点H的坐标

(Ⅲ)记K为矩形$AOBC$对角线的交点，S为$\triangle KDE$的面积，求S

的取值范围(直接写出结果即可).

【思维教练】本问属于旋转过程中的点圆最值问题，如图，点 D 在以 A 为圆心，OA 长为半径的圆上，当点 D 在线段 AB 上时，$\triangle KDE$ 的面积最小；当点 D 在线段 BA 的延长线上时，$\triangle KDE$ 的面积最大



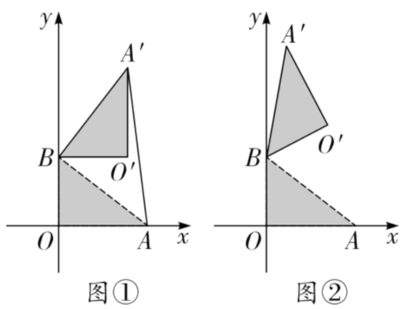
针对演练

1.在平面直角坐标系中，O 为原点，点 $A(4，0)$，点 $B(0，3)$，把$\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转，得$\triangle A'BO'$，点 A，O 旋转后的对应点为 A'，O'.记旋转角为 α.

(Ⅰ)如图①，若 $\alpha=90°$，求 AA'的长；

(Ⅱ)如图②，若 $\alpha=120°$，求点 O'的坐标；

(Ⅲ)在(Ⅱ)的条件下，边 OA 上的一点 P 旋转后的对应点为 P'，当 $O'P+BP'$取得最小值时，求点 P'的坐标(直接写出结果即可).



第 1 题图

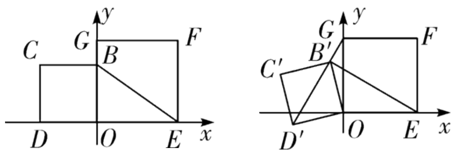
2. 在平面直角坐标系中，有正方形 $OBCD$ 和正方形 $OEFG$, $E(2\sqrt{2}，0)$，$B(0，2)$.

(Ⅰ)如图①，求 BE 的长；

(Ⅱ)将正方形 $OBCD$ 绕点 O 逆时针旋转，得正方形 $OB'C'D'$.

①如图②，当点 B'恰好落在线段 $D'G$ 上时，求 $B'E$ 的长；

②将正方形 $OB'C'D'$绕点 O 继续逆时针旋转，线段 $D'G$ 与线段 $B'E$ 的交点为 H，求$\triangle GHE$ 与$\triangle B'HD'$面积之和的最大值，并求出此时点 H 的坐标(直接写出结果).



图①　　图②

第 2 题图

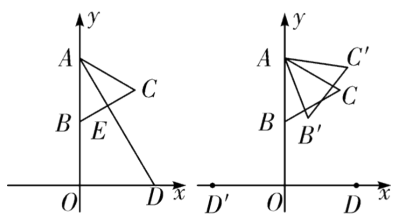
3. 如图①，$\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$的等边三角形，点 E 为 BC 中点，连接 AE 并延长与 x 轴交于点 D，已知点 $B(0，2\sqrt{3})$.

(Ⅰ)求点 D 的坐标；

(Ⅱ)如图②，将$\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到$\triangle AB'C'$，点 B，C 的对应点分别为点 B'，C'，D'为 D 关于 y 轴的对称点.

①连接 $D'B'$，$C'D$，证明：$D'B'=C'D$.

②连接 $B'D$，点 F 为 $B'D$ 的中点，连接 $D'F$，在$\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转过程中，当线段 $D'F$ 最大时，请直接写出$\triangle D'OF$ 的面积.



图①　　图②

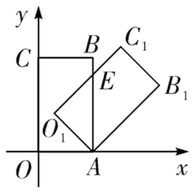
第 3 题图

4. 在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 A, C 分别在 x 轴、y 轴上，点 B 的坐标为$(2, 2\sqrt{3})$，将矩形 $OABC$ 绕点 A 顺时针旋转 α，得到矩形 $O_1AB_1C_1$，点 O，B，C 的对应点分别为 O_1，B_1，C_1.

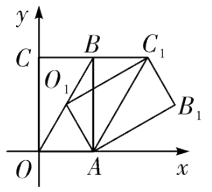
(Ⅰ)如图①，当 $\alpha=45°$时，O_1C_1 与 AB 相交于点 E，求点 E 的坐标；

(Ⅱ)如图②，当点 O_1 落在对角线 OB 上时，连接 BC_1，四边形 OAC_1B 是何特殊的四边形？并说明理由；

(Ⅲ)连接 BC_1，当 BC_1 取得最小值和最大值时，分别求出点 B_1 的坐标(直接写出结果即可).



图①



图②

第 4 题图

类型二　折叠问题

满　　分　　技　　法

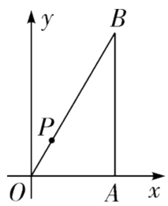
具体内容详见本书 微专题　图形折叠问题.

典例精讲

例 2　将一个直角三角形纸片 OAB 放置在平面直角坐标系中，点 $O(0, 0)$，点 $A(2, 0)$，点 B 在第一象限，$\angle OAB=90°$，$\angle B=30°$，点 P 在边 OB 上(点 P 不与点 O，B 重合).

(Ⅰ)如图①，当 $OP=1$ 时，求点 P 的坐标；

【思维教练】已知 OP，要求点 P 的坐标，需过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于点 H，构造 Rt$\triangle OPH$，再解直角三角形即可求解



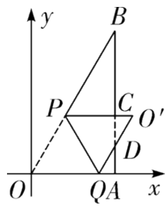
例 2 题图①

(Ⅱ)折叠该纸片，使折痕所在的直线经过点 P，并与 x 轴的正半轴相交于点 Q，且 $OQ=$

OP，点 O 的对应点为 O'，设 $OP=t$.

① 如图②，若折叠后$\triangle O'PQ$与$\triangle OAB$重叠部分为四边形，$O'P$，$O'Q$ 分别与边 AB 相交于点 C，D，试用含有 t 的式子表示 $O'D$ 的长，并直接写出 t 的取值范围；

【思维教练】要求 $O'D$ 关于 t 的函数关系式，观察图形可用 $O'Q-QD$ 求解，已知 $OQ=OP$，可得四边形 $OQO'P$ 为菱形，进而可得 QO'，QA 关于 t 的函数关系式，再在 Rt$\triangle QAD$ 中利用直角三角形的边角关系即可求解



例 2 题图②

② 若折叠后$\triangle O'PQ$与$\triangle OAB$重叠部分的面积为 S，当 $1\le t\le 3$ 时，求 S 的取值范围(直接写出结果即可).

【思维教练】要求当 $1\le t\le 3$ 时 S 的取值范围，需先分段确定 S 关于 t 的函数关系式，再利用函数性质求解

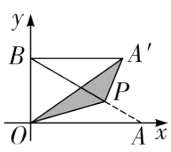
针对演练

1. 将一个直角三角形纸片 ABO 放置在平面直角坐标系中，点 $A(\sqrt{3}，0)$，点 $B(0，1)$，点 $O(0，0)$. P 是边 AB 上的一点(点 P 不与点 A，B 重合)，沿着 OP 折叠该纸片，得点 A 的对应点 A'.

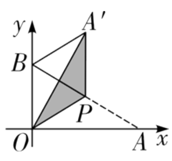
(Ⅰ)如图①，当点 A'在第一象限，且满足 $A'B\perp OB$ 时，求点 A'的坐标；

(Ⅱ)如图②，当 P 为 AB 中点时，求 $A'B$ 的长；

(Ⅲ)当$\angle BPA'=30°$时，求点 P 的坐标(直接写出结果即可).



图①



图②

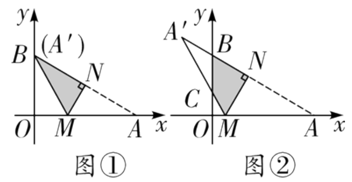
第 1 题图

2. 将一个直角三角形纸片 ABO，放置在平面直角坐标系中，点 $A(\sqrt{3}，0)$，点 $B(0，1)$，点 $O(0，0)$．过边 OA 上的动点 M(点 M 不与点 O，A 重合)作 $MN\perp AB$ 于点 N，沿着 MN 折叠该纸片，得顶点 A 的对应点 A'，设 $OM=m$，折叠后的$\triangle A'MN$ 与四边形 $OMNB$ 重叠部分的面积为 S.

(Ⅰ)如图①，当点 A'与顶点 B 重合时，求点 M 的坐标；

(Ⅱ)如图②，当点 A'落在第二象限时，$A'M$ 与 OB 相交于点 C，试用含 m 的式子表示 S；

(Ⅲ)当 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{24}$时，求点 M 的坐标(直接写出结果即可).



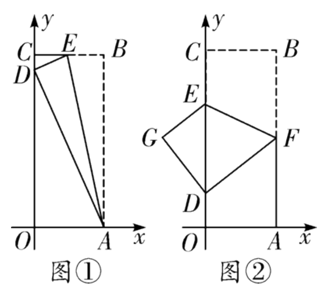
第 2 题图

3. 将一个矩形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中，OA，OC 分别在 x 轴，y 轴的正半轴上，点 B 坐标为(4，10).

(Ⅰ)如图①，将矩形纸片 $OABC$ 折叠，使点 B 落在 y 轴上的点 D 处，折痕为线段 AE，求点 D 坐标；

(Ⅱ)如图②，点 E，F 分别在 OC，AB 边上，将矩形纸片 $OABC$ 沿线段 EF 折叠，使得点 B 与 $D(0，2)$重合．求点 C 的对应点 G 的坐标；

(Ⅲ)在(Ⅱ)的条件下，若点 P 是坐标系内任意一点，点 Q 在 y 轴上，使以点 D、F、P、Q 为顶点的四边形是菱形，请直接写出满足条件的点 P 的坐标.



第 3 题图

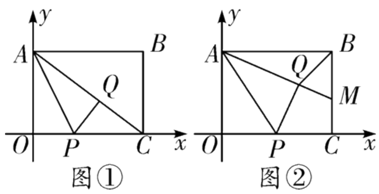
4. 将一张矩形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中，点 $O(0，0)$，点 $A(0，6)$，点 $C(8，0)$．点 P 是边 OC 上的一个动点，将$\triangle OAP$ 沿 AP 折叠，得点 O 的对应点为点 Q.

(Ⅰ)如图①，当点 Q 恰好落在 AC 上时，求点 P 的坐标；

(Ⅱ)如图②，直线 AQ 交 BC 于点 M.

①当 $QM=CM$ 时，求点 P 的坐标；

②当 BQ 的长最小时，求四边形 $PCMQ$ 的面积(直接写出结果即可).



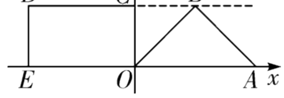
第 4 题图

类型三　平移问题

典例精讲

例 3　在平面直角坐标系中，O 为原点，$\triangle OAB$ 是等腰直角三角形，$\angle OBA=90°$，$BO=BA$，顶点 $A(4，0)$，点 B 在第一象限，矩形 $OCDE$ 的顶点 $E(-\frac{7}{2}，0)$，点 C 在 y 轴的正半轴上，点 D 在第二象限，射线 DC 经过点 B.

【思维教练】要求点 B 的坐标，由$\triangle OAB$ 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质和底边 OA 的长度，求出斜边上的高即可求解　(Ⅰ)如图①，求点 B 的坐标；

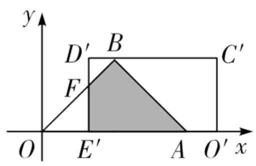


例 3 题图①

(Ⅱ)将矩形 $OCDE$ 沿 x 轴向右平移，得到矩形 $O'C'D'E'$，点 O，C，D，E 的对应点分别为 O'，C'，D'，E'.设 $OO'=t$，矩形 $O'C'D'E'$与$\triangle OAB$ 重叠部分的面积为 S.

①如图②，当点 E'在 x 轴正半轴上，且矩形 $O'C'D'E'$与$\triangle OAB$ 重叠部分为四边形时，$D'E'$与 OB 相交于点 F，试用含有 t 的式子表示 S，并直接写出 t 的取值范围；

【思维教练】要求重叠部分面积 S 与 t 的函数关系式，观察图形可知用 $S_{\triangle OAB}-S_{\triangle FOE'}$即可求解



例 3 题图②

②当$\frac{5}{2}\leq t\leq\frac{9}{2}$时，求 S 的取值范围(直接写出结果即可).

【思维教练】要求当$\frac{5}{2}\leq t\leq\frac{9}{2}$时 S 的取值范围，先分段确定 S 关于 t 的函数关系式，再利用函数的性质求解

针对演练

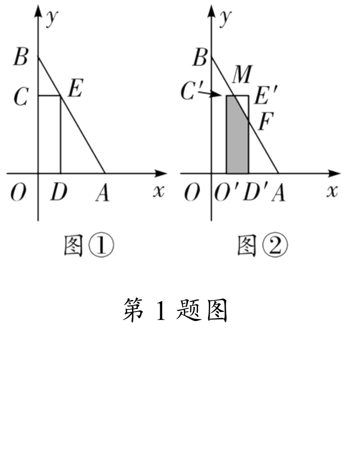
1. 在平面直角坐标系中，O 为原点，点 $A(6，0)$，点 B 在 y 轴的正半轴上，$\angle ABO=30°$.矩形 $CODE$ 的顶点 D，E，C 分别在 OA，AB，OB 上，$OD=2$.

(Ⅰ)如图①，求点 E 的坐标；

(Ⅱ)将矩形 $CODE$ 沿 x 轴向右平移，得到矩形 $C'O'D'E'$，点 C，O，D，E 的对应点分别为 C'，O'，D'，E'.设 $OO'=t$，矩形 $C'O'D'E'$与$\triangle ABO$ 重叠部分的面积为 S.

①如图②，当矩形 $C'O'D'E'$与$\triangle ABO$ 重叠部分为五边形时，$C'E'$，$E'D'$分别与 AB 相交于点 M，F，试用含有 t 的式子表示 S，并直接写出 t 的取值范围；

②当$\sqrt{3}\leq S\leq 5\sqrt{3}$时，求 t 的取值范围(直接写出结果即可).



第 1 题图

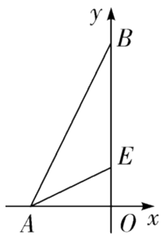
2. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(-2，0)$，点 $B(0，4)$，点 E 在 OB 上，且$\angle OAE=\angle OB$A.

(Ⅰ)如图①，求点 E 的坐标；

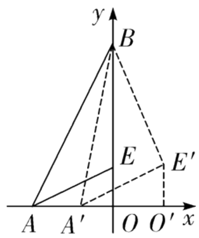
(Ⅱ)如图②，将$\triangle AEO$ 沿 x 轴向右平移得到$\triangle A'E'O'$，连接 $A'B$，BE'.

①设 $AA'=m$，其中 $0<m<2$，试用含 m 的式子表示 $A'B^2+BE'^2$，并求出使 $A'B^2+BE'^2$ 取得最小值时点 E'的坐标；

②当 $A'B+BE'$取得最小值时，求点 E'的坐标.



图①



图②

第 2 题图

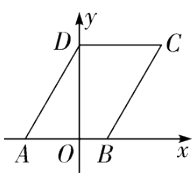
3. 将一个平行四边形纸片 $ABCD$ 放置在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 $A(-2，0)$，点 $B(1，0)$，点 D 在 y 轴正半轴上，$\angle DAB=60°$.

(Ⅰ)如图①，求点 D 的坐标；

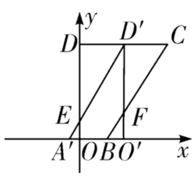
(Ⅱ)剪切下$\triangle ADO$ 并将其沿 x 轴正方向平移，点 A 的对应点为 A'，点 D 的对应点为 D'，点 O 的对应点为 O'，设 $OO'=t$，$\triangle A'D'O'$和四边形 $OBCD$ 重叠部分的面积为 S.

①如图②，若平移后$\triangle A'D'O'$和四边形 $OBCD$ 重叠部分是五边形时，$A'D'$交 y 轴于点 E，$O'D'$交 BC 于点 F，试用含有 t 的式子表示 S，并直接写出 t 的取值范围；

②当$\frac{2}{3}\le t\le\frac{8}{3}$时，求 S 的取值范围(直接写出结果即可).



图①



图②

第 3 题图

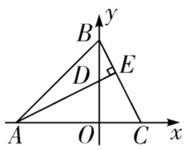
4. 在平面直角坐标系中，$O(0，0)$为原点，点$A(-4，0)$，$B(0，4)$，$C(2，0)$，$AE⊥BC$于点E，交OB于点D.

(Ⅰ)如图①，求点D的坐标；

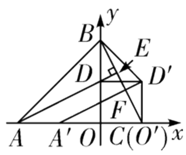
(Ⅱ)将$\triangle AOD$沿x轴的正方向平移，得到$\triangle A'O'D'$，点A，O，D的对应点分别为A'，O'，D'，设$AA'=m$.

①如图②，当$\angle BD'D=45°$时，设$A'D'$交BC于点F，求EF的长；

②设平移后的$\triangle A'O'D'$与$\triangle BOC$重叠部分的面积为S，当$0<m<4$时，求S关于m的关系式(直接写出结果即可).



图①



图②

第 4 题图

参考答案

类型一　旋转问题

典例精讲

例 1　解：(Ⅰ)∵点$A(5，0)$，点$B(0，3)$，

∴$OA=5$，$OB=3$，

∵四边形$AOBC$是矩形，

∴$AC=OB=3$，$BC=OA=5$，$\angle OBC=\angle C=90°$，

∵矩形$ADEF$是由矩形$AOBC$旋转得到的，

∴$AD=AO=5$，

∴在$Rt\triangle ADC$中，由勾股定理得

$DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\therefore BD=BC-DC=5-4=1$，

∴点 D 的坐标为$(1，3)$;

(Ⅱ)①证明：由四边形 $ADEF$ 是矩形，得$\angle ADE=90°$，

又∵点 D 在线段 BE 上，

$\therefore \angle ADB=90°$，

由(Ⅰ)知，$AD=AO$，

又$\because AB=AB$，$\angle AOB=90°$，

$\therefore Rt\triangle ADB\cong Rt\triangle AOB$；

②由 $Rt\triangle ADB\cong Rt\triangle AOB$ 得$\angle BAD=\angle BAO$，

在矩形 $AOBC$ 中，$\because OA\parallel BC$，

$\therefore \angle CBA=\angle OAB$，

$\therefore \angle BAD=\angle CBA$，

$\therefore BH=AH$，

设 $BH=t$，则 $AH=t$，$HC=BC-BH=5-t$，

∵在 $Rt\triangle AHC$ 中，$AH^2=AC^2+HC^2$，

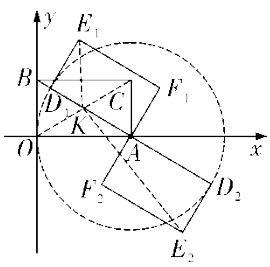
即 $t^2=3^2+(5-t)^2$，解得 $t=\dfrac{17}{5}$，

$\therefore BH=\dfrac{17}{5}$，

∴点 H 的坐标为$(\dfrac{17}{5}，3)$；

(Ⅲ)$\dfrac{30-3\sqrt{34}}{4}\leqslant S\leqslant\dfrac{30+3\sqrt{34}}{4}$.

【解法提示】如解图，以点 A 为圆心，AD 为半径作⊙A，则在矩形 $ADEF$ 旋转过程中，DE 始终是⊙A 的切线，切点为 D，设在$\triangle KDE$ 中，DE 边上的高为 h，则：①当点 D 与 D_1 重合，即 $KD_1\perp D_1E_1$ 时，此时 $h=KD_1$ 取到最小值，$\therefore S=\dfrac{1}{2}h\cdot D_1E_1$ 取到最小值，而 $D_1E_1=OB=3$，$h=KD_1=AD_1-AK=AO-AK=5-\dfrac{\sqrt{5^2+3^2}}{2}=5-\dfrac{\sqrt{34}}{2}$，$\therefore S=\dfrac{1}{2}\times(5-\dfrac{\sqrt{34}}{2})\times 3=\dfrac{30-3\sqrt{34}}{4}$；②当点 D 与点 D_2 重合时，$KD_2\perp D_2E_2$，此时 $h=KD_2$ 取到最大值，$\therefore S=\dfrac{1}{2}h\cdot D_2E_2$ 取到最大值，由①可得此时 $S=\dfrac{1}{2}\times(5+\dfrac{\sqrt{34}}{2})\times 3=\dfrac{30+3\sqrt{34}}{4}$.综上所述，$\dfrac{30-3\sqrt{34}}{4}\leqslant S\leqslant\dfrac{30+3\sqrt{34}}{4}$.



例 1 题解图

针对演练

1. 解：(Ⅰ)$\because A(4，0)$，$B(0，3)$，

$\therefore OA=4$，$OB=3$.

在 Rt$\triangle ABO$ 中，由勾股定理得

$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$，

根据题意，$\triangle A'BO'$是$\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 90°得到的，

由旋转的性质可得$\angle A'BA=90°$，$A'B=AB=5$，

$\therefore$在 Rt$\triangle A'BA$ 中，由勾股定理得，$AA'=\sqrt{A'B^2+AB^2}=5\sqrt{2}$；

(Ⅱ)如解图①，过点 O'作 $O'C\perp y$ 轴，垂足为 C，则$\angle O'CB=90°$，

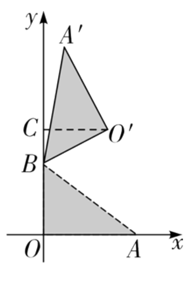
由旋转的性质可得$\angle O'BO=120°$，$O'B=OB=3$，

$\because$在 Rt$\triangle O'CB$ 中，$\angle O'BC=180°-\angle O'BO=60°$，

$\therefore O'C=O'B\cdot\sin\angle O'BC=O'B\cdot\sin60°=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$BC=O'B\cdot\cos\angle O'BC=O'B\cdot\cos60°=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore OC=OB+BC=3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$.

$\therefore$点 O'的坐标为$(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}，\dfrac{9}{2})$；

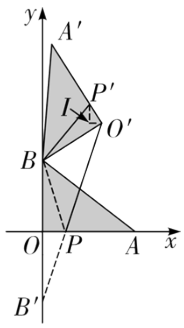


第 1 题解图①

(Ⅲ)点 P'的坐标是$(\dfrac{6\sqrt{3}}{5}，\dfrac{27}{5})$.

【解法提示】如解图②，由旋转得 $BP=BP'$，作点 $B(0，3)$关于 x 轴的对称点 B

$'(0,-3)$，由(Ⅱ)得 $O'(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{9}{2})$，可求得直线 $O'B'$ 的解析式为 $y=\frac{5\sqrt{3}}{3}x-3$，令 $y=0$，得 $x=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，$\therefore P(\frac{3\sqrt{3}}{5},0)$，则当 O'、P、B' 三点共线时，$O'P+BP'$ 最小，$\because OP=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，$\therefore O'P'=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，过点 P' 作 $P'I\parallel y$ 轴，过点 O' 作 $O'I\parallel x$ 轴，$P'I$ 与 $O'I$ 交于点 I.$\because$在 $\text{Rt}\triangle P'O'I$ 中，$\angle P'O'I=90°-\angle BO'I=60°$，$\therefore P'I=\frac{3\sqrt{3}}{5}\sin60°=\frac{9}{10}$，$IO'=\frac{3\sqrt{3}}{5}\cos60°=\frac{3\sqrt{3}}{10}$.$\because O'(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{9}{2})$，$\therefore P'(\frac{6\sqrt{3}}{5},\frac{27}{5})$.



第 1 题解图②

2. 解：(Ⅰ)由题意可知 $OE=2\sqrt{2}$，$OB=2$，

在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中，由勾股定理得 $BE=\sqrt{OB^2+OE^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$；

(Ⅱ)①$\because$四边形 $OB'C'D'$ 和四边形 $OEFG$ 都是正方形，

$\therefore OD'=OB'$，$OG=OE$，$\angle D'OB'=\angle GOE=90°$，

$\therefore \angle D'OB'+\angle B'OG=\angle GOE+\angle B'OG$，

即$\angle D'OG=\angle B'OE$，

在$\triangle OD'G$ 和$\triangle OB'E$ 中，

$$\begin{cases}OD'=OB'\\ \angle D'OG=\angle B'OE,\\ OG=OE\end{cases}$$

$\therefore \triangle OD'G\cong\triangle OB'E(\text{SAS})$，

$\therefore D'G=B'E$，

如解图，连接 OC' 交 $D'G$ 于点 M，

$\because$四边形 $OB'C'D'$ 是正方形，

$\therefore \angle OMG=\angle OD'C'=90°$，$\angle MD'O=45°$，

在 $\text{Rt}\triangle OMD'$ 中，$\cos\angle MD'O=\frac{D'M}{OD'}$，

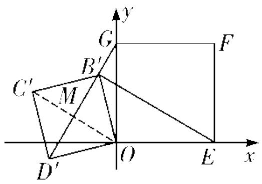
$\therefore D'M=OD'\cdot\cos45°=OB'\cdot\cos45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

$\therefore OM=D'M=\sqrt{2}$，

在 $\text{Rt}\triangle OMG$ 中，由勾股定理得 $GM=\sqrt{OG^2-OM^2}=\sqrt{OE^2-OM^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$.

$\therefore D'G=D'M+GM=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，

$\therefore B'E=D'G=\sqrt{2}+\sqrt{6}$；



第 2 题解图

②$\triangle GHE$ 与$\triangle B'HD'$面积之和的最大值为 6，此时点 H 的坐标为(0，0).

【解法提示】对于$\triangle EGH$，点 H 在以 EG 为直径的圆上，∴当点 H 与点 O 重合时，$\triangle EGH$ 的高最大；对于$\triangle B'D'H$，点 H 在以 $B'D'$为直径的圆上，∴当点 H 与点 O 重合时，$\triangle B'D'H$ 的高最大，则$\triangle GHE$ 和$\triangle B'HD'$面积之和的最大值为 $2+4=6$，此时点 H 的坐标为(0，0).

3. 解：(Ⅰ)∵$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 E 为 BC 中点，

$\therefore AD\perp BC$，$\angle OAD=30°$，

又∵$\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$，点 $B(0，2\sqrt{3})$，

$\therefore OA=4\sqrt{3}$，

$\because \angle OAD=30°$，

在 Rt$\triangle AOD$ 中，$\tan\angle OAD=\dfrac{OD}{OA}$，

$\therefore OD=OA\cdot\tan30°=4$，

∴点 D 的坐标为(4，0)；

(Ⅱ)如解图①，连接 AD'，AD，

$\because OD=OD'$，$AO\perp DD'$，

$\therefore AD=AD'=8$，

$\because DD'=8$，

$\therefore AD=AD'=DD'$，

$\therefore \triangle ADD'$为等边三角形，

$\therefore \angle DAD'=60°$.

$\because \angle B'AC'=60°$，

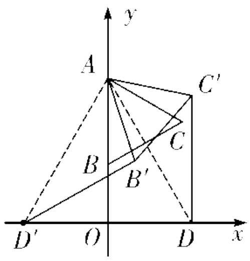
$\therefore \angle DAD'=\angle B'AC'$，

$\therefore \angle D'AB'=\angle DAC'$，

$\because AD'=AD$，$AB'=AC'$，

$\therefore \triangle AD'B' \cong \triangle ADC'$(SAS)，

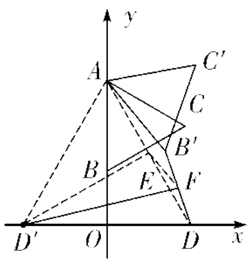
$\therefore D'B' = C'D$；



第 3 题解图①

(Ⅲ)$5\sqrt{3}$.

【解法提示】如解图②，连接 AD'，AD，取 AD 的中点 E，连接 $D'E$，EF.$\because \triangle AD'D$ 是等边三角形，$AE = ED$，$\therefore D'E \perp AD$，$\because AD = 8$，$\therefore AO = D'E = 4\sqrt{3}$，$\because AE = DE$，$B'F = DF$，$\therefore EF = \frac{1}{2}AB' = \sqrt{3}$，$\therefore$点 F 的运动轨迹是以 E 为圆心，$\sqrt{3}$为半径的圆，$\therefore$当点 F 在 $D'E$ 的延长线上时，$D'F$ 的值最大，此时 $D'F = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$，$S_{\triangle D'OF} = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{3} \times 4 \times \frac{1}{2} = 5\sqrt{3}$.



第 3 题解图②

4. 解：(Ⅰ)$\because$四边形 $OABC$ 为矩形，

$\therefore \angle OAB = 90°$.

$\because \angle OAO_1 = 45°$，

$\therefore \angle O_1AE = 45°$.

$\because \angle AO_1E = 90°$，$O_1A = OA = 2$，

$\therefore AE = \frac{O_1A}{\cos 45°} = 2\sqrt{2}$，

$\therefore E(2，2\sqrt{2})$；

(Ⅱ)四边形 OAC_1B 是平行四边形，理由如下：$\because$在 $Rt\triangle AOB$ 中，$\tan\angle AOB = \frac{AB}{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$，

$\therefore \angle BOA = 60°$，

同理可得$\angle O_1AC_1 = 60°$，