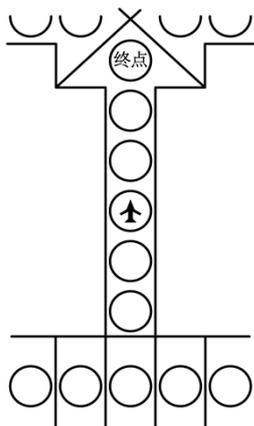




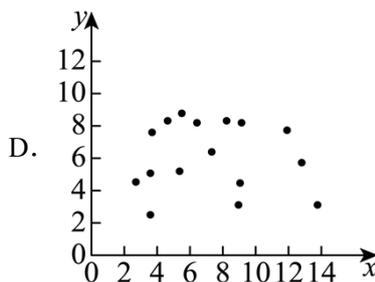
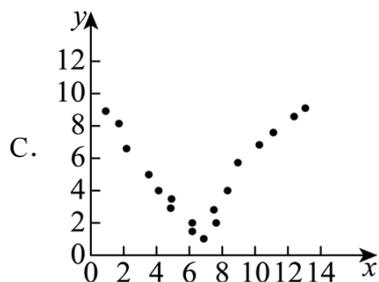
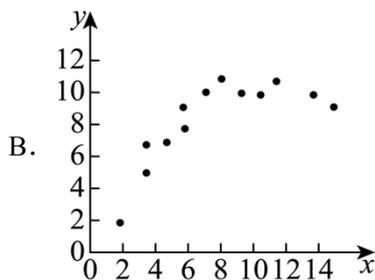
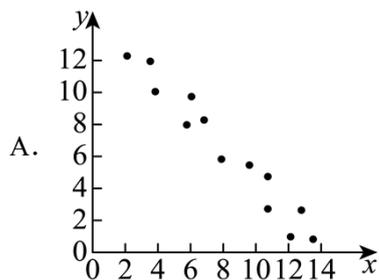
飞行棋是一种家喻户晓的竞技游戏，玩家根据骰子（骰子为均匀的正六面体）正面朝上的点数确定飞机往前走的步数，刚好走到终点处算“到达”，如果玩家投掷的骰子点数超出到达终点所需的步数，则飞机须往回走超出点数对应的步数.在一次游戏中，飞机距终点只剩3步（如图所示），设该玩家到达终点时投掷骰子的次数为 $X$ ，则 $E(X)=$ （ ）



- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

二、多选题

9. 观察下列散点图的分布规律和特点，其中两个变量存在相关关系的有（ ）



10. 已知 $A(-a,0)$ ， $B(a,0)$ ， $l_1:ax-y=0$ ， $l_2:ax+y=0$ ，其中 $a>1$ ，点 $P$ 为平面内一点，记点 $P$ 到 $l_1$ ， $l_2$ 的距离分别为 $d_1$ ， $d_2$ ，则下列条件中能使点 $P$ 的轨迹为椭圆的是（ ）

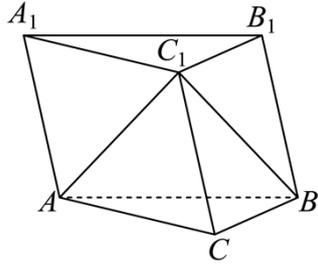
- A.  $|PA|+|PB|=4a$                       B.  $|PA|^2+|PB|^2=4a^2$

C.  $d_1 + d_2 = 4a$

D.  $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$







(1) 求证:  $BC_1 \perp BC$ ;

(2) 若二面角  $A-A_1C_1-B_1$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ , 且  $AB=2BC=2$ , 求  $AC_1$ .

18. 已知函数  $f(x) = (4x+a)\ln(x+1)$ ,  $g(x) = x^2 + bx$ .

(1) 当  $a=4$  时, 求  $f(x)$  的最小值;

(2) 若  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  在原点处的切线重合, 且函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  有且仅有三个极值点, 求实数  $a$  的取值范围.

19. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n, 2n+1\} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 集合  $B \subseteq A$ , 且  $B$  中的任意三个不同的元素  $x, y, z$  都有  $x+y \neq z$ .

(i) 当  $n=3$  时, 写出一个满足条件的恰有四个元素的集合  $B$ ;

(ii) 对于任意给定的  $n (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ , 求集合  $B$  中的元素个数的最大值.

(2) 已知集合  $P = \{C | C \subseteq A\}$ ,  $Q = \{C_1, C_2, \dots, C_k\} \subseteq P$ , 且同时满足以下条件: ①  $\forall C_i$ ,

$C_j \in Q$ , 都有  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$  (其中  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j$ ); ②  $\forall D \in \mathcal{P}(Q), \exists C_s \in Q$ , 使得

$D \cap C_s = \emptyset$  (其中  $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ ). 求集合  $Q$  中的元素个数  $k$ .

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	D	B	B	A	B	D	ABC	AD
题号	11									
答案	ACD									

1. C

【分析】将集合 A 用列举法写出具体的元素，由集合 B 的表达式可知集合 B 的元素  $x \geq 0$ ，即可得到  $A \cap B$  的结果。

【详解】将集合 A 用列举法写出得： $A = \{x \in \mathbf{N} | -1 \leq x < 4\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，

对于集合 B，由  $y = \sqrt{x}$  可知： $x \geq 0$ ，所以  $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$ 。

故选：C。

2. D

【分析】先进行复数化简，再根据几何意义得解。

【详解】 $i^{2025}z = 1+i$ ，化简，即  $iz = 1+i$ ，即  $z = \frac{1+i}{i} = 1-i$ 。

根据复数几何意义知道，对应的点为  $(1, -1)$ ，在第四象限。

故选：D。

3. D

【分析】由题意，结合  $|a+2b|^2 = a^2 + 4a \cdot b + 4b^2$  计算即可求解。

【详解】由题意知， $|a| = |b| = 1, \langle a, b \rangle = 60^\circ$ ，

$$|a+2b|^2 = a^2 + 4a \cdot b + 4b^2 = 1 + 4|a||b|\cos 60^\circ + 4 = 7，$$

$$\text{所以 } |a+2b| = \sqrt{7}。$$

故选：D

4. B

【分析】根据直线的方向向量得出斜率，设点斜式方程，再由圆心到直线距离等于半径求解。

【详解】由直线  $l$  的方向向量为  $(1, -2)$  知，直线的斜率  $k = -2$ ，

设直线  $l$  方程为  $y = -2x + b$ ，

则由直线与圆相切知，圆心  $(1, 0)$  到直线的距离  $d = \frac{|-2+b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ ，

解得  $b = 7$  或  $b = -3$ ，

所以直线  $l$  的方程为  $y = -2x + 7$  或  $y = -2x - 3$ ,

即  $2x + y - 7 = 0$  或  $2x + y + 3 = 0$ ,

故选: B

5. B

【分析】运用两角和与差的正弦公式展开, 然后两式相减、两式相加各得一个等式, 再让这两个等式相除并化简即可求解.

$$\text{【详解】} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2},$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3},$$

$$\text{两式相减得 } 2 \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6},$$

$$\text{两式相加得 } 2 \sin \alpha \cos \beta = \frac{5}{6},$$

$$\text{所以 } \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{2 \cos \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5,$$

$$\text{即 } \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 5,$$

故选: B.

6. A

【分析】分析可知当  $x > 0$  时,  $e^x$  的取值范围是  $(1, +\infty)$ , 当  $x \leq 0$  时,  $f(x)$  的最大值为  $f(-1) = a + 2$ , 且注意到  $x$  趋于负无穷时,  $f(x)$  也会趋于负无穷, 由此即可列出不等式求解.

【详解】当  $x > 0$  时,  $e^x$  的取值范围是  $(1, +\infty)$ ,

注意到  $f(x) = x^3 - 3x + a, x \leq 0$ , 则  $f'(x) = 3(x-1)(x+1), x \leq 0$ ,

当  $x < -1$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递增, 在  $(-1, 0)$  上单调递减,

所以当  $x \leq 0$  时,  $f(x)$  的最大值为  $f(-1) = a + 2$ ,

且注意到  $x$  趋于负无穷时,  $f(x)$  也会趋于负无穷,

若函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^3 - 3x + a, & x \leq 0 \end{cases}$  的值域为  $\mathbf{R}$ ,

则当且仅当  $f(-1) = a + 2 \geq 1$ , 解得  $a \geq -1$ .

故选: A.

7. B

【分析】根据题意分析得  $\{b_n\}$  的项的情况, 从而求得  $T_{29}$ ,  $T_{28}$ , 进而得解.

【详解】由题意,  $\{b_n\}$  数列元素依次为  $a_1, \underbrace{3}_{2^1}, a_2, \underbrace{3, 3}_{2^2}, a_3, \underbrace{3, 3, 3}_{2^3}, a_4, \dots$ ,

在  $a_1$  到  $a_5$  之间 3 的个数为  $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$ , 故到  $a_5$  处  $\{b_n\}$  共有 35 个元素,

所以前 30 项中含  $a_1, \dots, a_4$  及 26 个 3,

故  $T_{29} = a_1 + a_2 + \dots + a_4 + 25 \times 3 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 - 4 + 75 = 2 + 4 + 8 + 16 - 4 + 75 = 101$ ,

而  $T_{28} = T_{29} - 3 = 98 < 0$ ,

故  $S_n \geq 100$  成立的最小的  $n$  为 29.

故选: B

8. D

【分析】先确定  $X$  的分布列, 再结合错位相减法及无穷数列的和求期望.

【详解】玩家投掷 1 次即可到达终点的方法是掷出 3 点, 故  $P(X=1) = \frac{1}{6}$ .

玩家投掷 2 次即可到达终点的方法是掷出 (1,2), (2,1), (4,1), (5,2), (6,3), 故

$P(X=2) = \frac{5}{36}$ .

玩家投掷 3 次即可到达终点的方法是掷出 (1,1,1), (1,3,1), (1,4,2), (1,5,3), (1,6,4),

(2,2,1), (2,3,2), (2,4,3), (2,5,4), (2,6,5), (4,2,1), (4,3,2), (4,4,3), (4,5,4),

(4,6,5), (5,1,1), (5,3,1), (5,4,2), (5,5,3), (5,6,4), (6,1,2), (6,2,1), (6,4,1),

(6,5,2), (6,6,3), 故  $P(X=3) = \frac{5^2}{6^3}$ .

设玩家投掷  $n$  次即可到达终点, 那么第  $n$  次掷得的点数可以为 1,2,3,4,5, 分别记作 (L, 1),

(L, 2), (L, 3), (L, 4), (L, 5), 则玩家投掷  $n+1$  次的基本事件是投掷  $n$  次的 6

倍，能到达终点的掷法：之前的(L,1)对应(L,2,1), (L,3,2), (L,4,3), (L,5,4), (L,6,5); (L,2)对应(L,1,1), (L,3,1), (L,4,2), (L,5,3), (L,6,4); (L,3)对应(L,1,2), (L,2,1), (L,4,1), (L,5,2), (L,6,3); (L,4)对应(L,1,3), (L,2,2), (L,3,1), (L,5,1), (L,6,2); (L,5)对应(L,1,4), (L,2,3), (L,3,2), (L,4,1), (L,6,1).是投掷 $n$ 次即可到达终点的5倍.

所以 $P(X=n)$ 是以 $\frac{1}{6}$ 为首项，以 $\frac{5}{6}$ 为公比的等比数列.所以 $P(X=n)=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ .

$$\text{所以 } E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{3}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{4}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$$

$$\text{即 } 6E(X) = 1 + 2 \times \frac{5}{6} + 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$$

$$\text{两边同乘以 } \frac{5}{6} \text{ 得: } 5E(X) = \frac{5}{6} + 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$$

$$\text{两式相减得: } E(X) = 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 6.$$

故选: D

**【点睛】**结论点睛: 若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1$ , 公比为 $q$ 的等比数列, 当 $|q| < 1$ 且 $q \neq 0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的所有项的和为:  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$ .

## 9. ABC

**【分析】**由相关关系对应的图形是散点图, 能反映两个变量的变化规律才具有相关关系直接可以判断.

**【详解】**相关关系对应的图形是散点图, ABC都能反映两个变量的变化规律, 它们都具有相关关系;

D中的点散乱地分布在坐标平面内, 不能反映两个变量的变化规律, 不具有相关关系.

故选: ABC.

## 10. AD

**【分析】**根据椭圆的定义可判断A的真假; 求P点的轨迹方程, 判断BCD的真假.

【详解】对 A: 根据椭圆的定义,  $|PA|+|PB|=4a>|AB|$ , 所以 P 点轨迹为椭圆, 故 A 正确;

对 B: 设  $P(x,y)$ , 则由  $(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=4a^2 \Rightarrow x^2+y^2=a^2$ , 所以 P 点轨迹为圆,

故 B 错误;

对 C: 由  $\frac{|ax-y|}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{|ax+y|}{\sqrt{a^2+1}}=4a \Rightarrow |ax-y|+|ax+y|=4a\sqrt{a^2+1}$ , 分情况去掉绝对值符号,

可知点 P 的轨迹为 4 条线段, 不是椭圆, 故 C 错误;

对 D: 由  $\left(\frac{|ax-y|}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2+\left(\frac{|ax+y|}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2=4a^2 \Rightarrow a^2x^2+y^2=2a^2(a^2+1)$ , 因为  $a>1$ ,

所以 P 点轨迹为椭圆, 故 D 正确.

故选: AD

## 11. ACD

【分析】对于 A, 用和差化积公式及二倍角公式化简可以判断; 对于 B, 利用导数研究  $f(x)$

的单调性, 进而可求  $f(x)$  的最值; 对于 C, 利用 B 的单调性比较自变量的大小即可比较函

数值的大小; 对于 D, 运用分析法, 多次使用和差化积、积化和差公式即可推导.

【详解】对于 A,

$$f(2)+f(4)=\sin 4-2 \sin 2+\sin 8-2 \sin 4=\sin 8-\sin 4-2 \sin 2=\sin 8+\sin (-4)-2 \sin 2,$$

由和差化积公式:  $\sin x+\sin y=2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$  得:

$$\sin 8+\sin (-4)-2 \sin 2=2 \sin 2 \cos 6-2 \sin 2=2 \sin 2(\cos 6-1)=-4 \sin 2 \sin ^2 3,$$

其中  $\sin 1=\sin \frac{180}{\pi} \approx \sin 57^\circ$ , 故  $\sin 2>0, \sin 3>0$ , 所以  $-4 \sin 2 \sin ^2 3<0$ , 即  $f(2)+f(4)<0$ , A 正

确;

对于 B, 对  $f(x)$  求导,  $f'(x)=2 \cos 2 x-2 \cos x=2(2 \cos ^2 x-\cos x-1)=2(2 \cos x+1)(\cos x-1)$ ,

在  $(0, 2 \pi)$  上, 令  $f'(x)<0$  得  $x \in\left(0, \frac{2 \pi}{3}\right),\left(\frac{4 \pi}{3}, 2 \pi\right)$ , 令  $f'(x)>0$  得  $x \in\left(\frac{2 \pi}{3}, \frac{4 \pi}{3}\right)$

所以  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{2 \pi}{3}\right)$  和  $\left(\frac{4 \pi}{3}, 2 \pi\right)$  单调递减, 在  $\left(\frac{2 \pi}{3}, \frac{4 \pi}{3}\right)$  单调递增,

故  $f(x)$  在区间  $(0, 2 \pi)$  上的最大值为  $f\left(\frac{4 \pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-2 \times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3 \sqrt{3}}{2}>\frac{5}{2}$ , 且  $\frac{4 \pi}{3}<6$ , 故 B 错误

对于 C, 当  $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$  时  $f(x)$  单调递增, 故  $f(x)$  在  $(3, 4)$  上单调递增,

而当  $x \in (3, 4)$  时,  $\frac{x}{3} + 2 \in \left(3, \frac{10}{3}\right) \subseteq (3, 4)$ , 且  $\frac{x}{3} + 2 < x$ , 故  $f\left(\frac{x}{3} + 2\right) < f(x)$ , C 正确;

对于 D,  $f(x) < f\left(\frac{17}{4} - x\right) \Leftrightarrow \sin 2x - 2\sin x < \sin\left(\frac{17}{2} - 2x\right) - 2\sin\left(\frac{17}{4} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sin\left(\frac{17}{2} - 2x\right) < 2\left[\sin x - \sin\left(\frac{17}{4} - x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \sin\left(2x - \frac{17}{2}\right) < 2\left[\sin x + \sin\left(x - \frac{17}{4}\right)\right],$$

由和差化积公式:  $\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$  得

$$2\cos \frac{17}{4} \sin\left(2x - \frac{17}{4}\right) < 4\cos \frac{17}{8} \sin\left(x - \frac{17}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos \frac{17}{4} \sin\left(x - \frac{17}{8}\right) \cos\left(x - \frac{17}{8}\right) < 4\cos \frac{17}{8} \sin\left(x - \frac{17}{8}\right)$$

因为  $0 < x < 2$ , 所以  $x - \frac{17}{8} \in \left(-\frac{17}{8}, -\frac{1}{8}\right) \subseteq [-\pi, 0]$ , 所以  $\sin\left(x - \frac{17}{8}\right) < 0$ ,

$$\text{所以 } \cos \frac{17}{4} \cos\left(x - \frac{17}{8}\right) > \cos \frac{17}{8} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{17}{8}\right) < \frac{\cos \frac{17}{8}}{\cos \frac{17}{4}}$$

$$\text{而 } x - \frac{17}{8} \in \left(-\frac{17}{8}, -\frac{1}{8}\right) \subseteq [-\pi, 0],$$

$$\therefore \cos\left(x - \frac{17}{8}\right) \left\langle \cos \frac{1}{8} \left\langle \frac{\cos \frac{17}{8}}{\cos \frac{17}{4}} \right\rangle \cos \frac{17}{8} \Leftrightarrow 2\cos \frac{1}{8} \cos \frac{17}{4} \right\rangle 2\cos \frac{17}{8},$$

$$\text{由积化和差得 } \cos \frac{35}{8} + \cos \frac{33}{8} > 2\cos \frac{17}{8} \Leftrightarrow \cos \frac{35}{8} - \cos \frac{17}{8} > \cos \frac{17}{8} - \cos \frac{33}{8}$$

$$\Leftrightarrow -2\sin \frac{9}{8} \sin \frac{13}{4} > 2\sin \frac{25}{8}, \text{ 其中 } \sin \frac{9}{8} > 0, \sin \frac{13}{4} < 0, \sin \frac{25}{8} \in (0, \sin 1) > 0,$$

上述不等式显然成立, 故 D 正确,

故选: ACD

【点睛】结论点睛: 和差化积与积化和差公式

和差化积公式:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/616011041040011001>