2023年高考数学第一次模拟考试卷（乙卷理科）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知纯虚数$z=(1+\mathrm{i})m^2-(4+\mathrm{i})m+3$，其中i为虚数单位，则实数$m$的值为（　）

A．1　　B．3　　C．1或3　　D．0

【答案】B

【分析】根据复数为纯虚数的条件可列出方程及不等式，即可求得答案.

【详解】因为$z=(1+\mathrm{i})m^2-(4+\mathrm{i})m+3$为纯虚数，

故$z=m^2-4m+3+(m^2-m)\mathrm{i}$，则$\begin{cases}m^2-4m+3=0\\m^2-m\neq 0\end{cases}$，解得$m=3$.

故选：B

2．$A=\{x\mid x^2-3x+2\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+4\leqslant 0\}$，$C=\{x|x>3\}$，则$(A\cap B)\cup C=$（　）

A．$\{x\mid x\geqslant 2\}$　　B．$\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$　　C．$\{x\mid x=1$或$x\geqslant 2\}$　　D．$\{x\mid x=1$或$2\leqslant x\leqslant 4\}$

【答案】C

【分析】先解一元二次不等式求出集合A，B，再根据集合的基本运算即可求解.

【详解】$\because A=\{x\mid x^2-3x+2\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 2$或$x\leqslant 1\}$，

$B=\{x\mid x^2-5x+4\leqslant 0\}=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$，

$\therefore A\cap B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4$或$x=1\}$，

因为$C=\{x|x>3\}$，

$\therefore (A\cap B)\cup C=\{x\mid x\geqslant 2$或$x=1\}$，

故选：C.

3．数列$\{a_n\}$满足$a_n=n^2+kn+2$，若不等式$a_n\geq a_4$恒成立，则实数k的取值范围是（　）

A．$[-9,-8]$　　B．$[-9,-7]$　　C．$(-9,-8)$　　D．$(-9,-7)$

【答案】B

【分析】由 $a_n=\left(n+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+2$ 利用二次函数的性质计算可得答案.

【详解】$a_n=n^2+kn+2=\left(n+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+2$，

∵不等式 $a_n \geq a_4$ 恒成立，

∴ $3.5 \leq -\frac{k}{2} \leq 4.5$，

解得 $-9 \leq k \leq -7$，

故选：B．

4．已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|=2\sqrt{2}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，若 $\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，则 $|\vec{c}|=$（　）

A．$\frac{8}{9}$　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

【答案】D

【分析】根据向量的数量积运算即可.

【详解】$|\vec{a}|=2|\vec{b}|=2\sqrt{2}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2$，

$|\vec{c}|^2=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2=\frac{8}{3}$，$|\vec{c}|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$．

故选：D.

5．已知抛物线 $C: y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点 F 到准线的距离为 4，点 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$ 在抛物线 C 上，若 $\left(y_1-2y_2\right)\left(y_1+2y_2\right)=48$，则 $\frac{|MF|}{|NF|}=$（　）.

A．4　　B．2　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】A

【分析】由焦准距求出 p，结合抛物线第一定义得 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{x_1+2}{x_2+2}$，$\left(y_1-2y_2\right)\left(y_1+2y_2\right)=48$ 整理得 $y_1^2-4y_2^2=48$，由 $y^2=2px$ 代换 y^2 即可求解.

【详解】抛物线$C:y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点$F$到准线的距离为4，所以$p=4$，$C:y^2=8x$

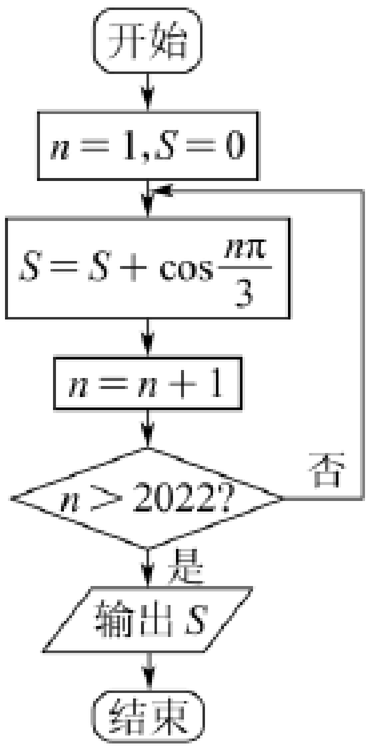
依题意，$y_1^2-4y_2^2=48$，而$y_1^2=8x_1$，$4y_2^2=32x_2$，

故$8x_1-32x_2=48$，即$8x_1+16=32x_2+64$，则$x_1+2=4\left(x_2+2\right)$，

故$\dfrac{|MF|}{|NF|}=\dfrac{x_1+2}{x_2+2}=4$，

故选：A．

6．执行如图的程序框图，输出的S值是（　　）



A．0　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．-1

【答案】A

【分析】根据程序框图理解可得：输出的S的值为有关余弦值求和问题，在解题的过程中，把握住余弦函数的周期性的应用，从而求得结果.

【详解】根据题中所给的框图，可知输出的S的值：

$S=0+\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cdots+\cos\dfrac{2022\pi}{3}$

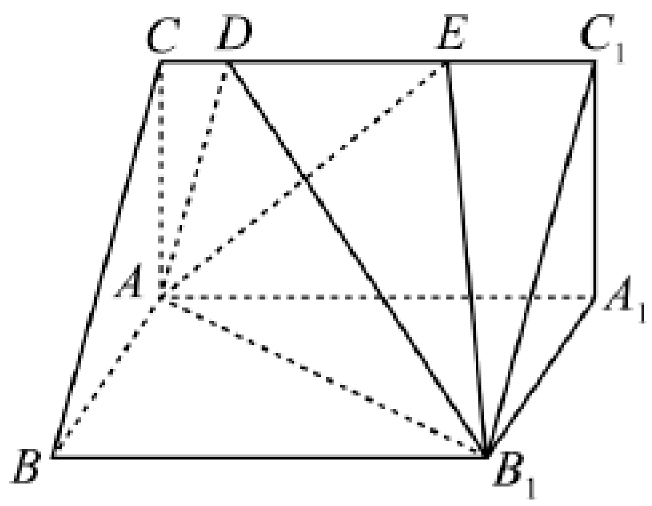
$=0+337\times(\cos\dfrac{\pi}{3}\quad\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cos\dfrac{3\pi}{3}+\cos\dfrac{4\pi}{3}+\cos\dfrac{5\pi}{3}+\cos\dfrac{6\pi}{3})$

$=337\times(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1)=0$

故选：A

7．如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AC=AB=\dfrac{1}{2}AA_1=1$，设D，E分别是棱CC_1上的两

个动点，且满足 $DE=1$，则下列结论错误的是（　）



A．平面 $ABC\perp$ 平面 B_1DE　　B．$A_1A//$ 平面 B_1DE

C．$AB_1\perp$ 平面 ADE　　D．三棱锥 $A-B_1DE$ 体积为定值

【答案】C

【分析】根据面面垂直、线面平行、线面垂直、锥体体积等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】A 选项，过 A 作 $AF\perp BC$，垂足为 F，

根据直三棱柱的性质可知 $BB_1\perp$ 平面 ABC，

由于 $AF\subset$ 平面 ABC，所以 $BB_1\perp AF$，

由于 $BC\cap BB_1=B,BC,BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AF\perp$ 平面 BCC_1B_1，即 $AF\perp$ 平面 B_1DE，

由于 $AF\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 B_1DE，A 选项正确.

B 选项，根据三棱柱的性质可知 $A_1A//CC_1$，即 $A_1A//DE$，

由于 $A_1A\not\subset$ 平面 B_1DE，$DE\subset$ 平面 B_1DE，所以 $A_1A//$ 平面 B_1DE，B 选项正确.

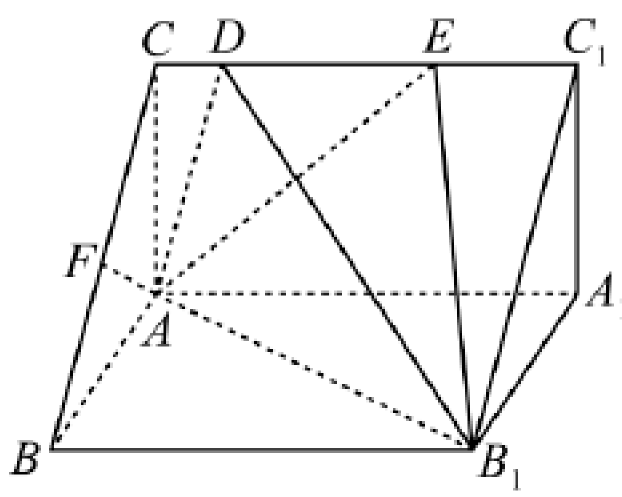
C 选项，若 $AB_1\perp$ 平面 ADE，即 $AB_1\perp$ 平面 AA_1C_1C，

由于 $A_1A\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $AB_1\perp A_1A$，这与已知 AB_1,A_1A 不垂直矛盾，C 选项错误.

D 选项，$V_{A-B_1DE}=V_{B_1-ADE}$，由于三角形 ADE 的面积为定值、B_1 到平面 AA_1C_1C 的距离为定值，

所以 $V_{A-B_1DE}=V_{B_1-ADE}$ 为定值，所以 D 选项正确.

故选：C



8．已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公比为q，则下列选项正确的有（　）

A．若$q>1$，则$a_{n+1}>a_n$

B．$a_1a_2\cdots a_n=(a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$

C．数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列

D．对任意正整数n，$(S_{2n}-S_n)^2=S_n(S_{3n}-S_{2n})$

【答案】D

【分析】取$a_1<0$，结合作差法可判断 A 选项；取$q<0$，$n=2$可判断 B 选项；取$q=1$可判断 C 选项；利用等比数列的求和公式可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，若$a_1<0$且$q>1$，则对任意的$n\in N^*$，$a_n=a_1q^{n-1}<0$，

所以，$a_{n+1}-a_n=a_n(q-1)<0$，即$a_{n+1}<a_n$，A 错；

对于 B 选项，当$q<0$时，$a_1a_2=a_1^2q<0$，则$a_1a_2<0,(a_1a_2)^{\frac{2}{2}}>0$，B 错；

对于 C 选项，若$q=1$，则$a_{n+1}-a_n=0$，此时，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$不是等比数列，C 错；

对于 D 选项，$S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}=q^n(a_1+a_2+\cdots+a_n)=q^nS_n$，

$S_{3n}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}=q^{2n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=q^{2n}S_n$，

所以，$S_n(S_{3n}-S_{2n})=q^{2n}S_n^2=(S_{2n}-S_n)^2$，D 对.

故选：D.

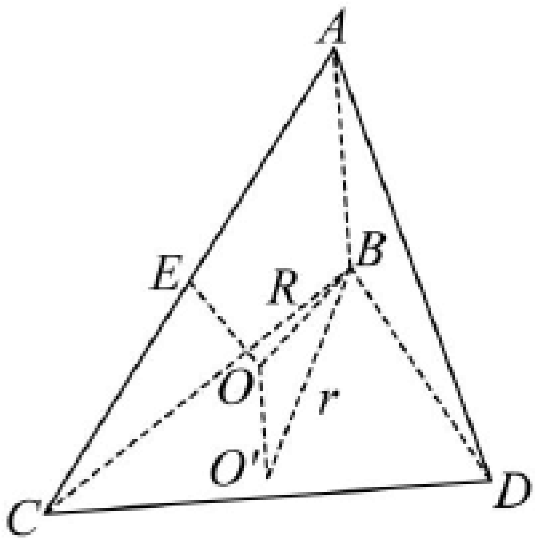
9．已知四面体$ABCD$的所有顶点在球O的表面上，$AB\perp$平面BCD，$AB=2\sqrt{3}$，$CD=2\sqrt{2}$，$\angle CBD=135°$，则球O的体积为（　）

A．$\dfrac{76\sqrt{19}\pi}{3}$　　B．$\dfrac{76\pi}{3}$　　C．$\dfrac{28\pi}{3}$　　D．$\dfrac{28\sqrt{7}\pi}{3}$

【答案】D

【分析】作图，先找到外接球的球心，算出底面三角形BCD外接圆的半径,再构造三角形运用勾股定理求出

外接球的半径.



【详解】

如图，设底面$\triangle BCD$ 的外接圆的圆心为O' ，外接圆的半径为 r，由正弦定理得

$2r=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 135^{\circ}}=4,\therefore r=2$ ，

过O' 作底面 BCD 的垂线，与过 AC 的中点 E 作侧面 ABC 的垂线交于 O，则 O 就是外接球的球心，

并且$OO'=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{3}$ ，外接球的半径$R=OB=\sqrt{OO'^2+r^2}=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$ ，

球 O 的体积为$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{28\sqrt{7}}{3}\pi$ ；

故选：D.

10．由 1，2，3，4，5 组成的没有重复数字的五位数，从中任意抽取一个，则其恰好为“前 3 个数字保持递减，后 3 个数字保持递增”（如五位数“43125”，前 3 个数字“431”保持递减，后 3 个数字“125”保持递增）的概率是（　）

A．$\dfrac{1}{20}$　　B．$\dfrac{1}{12}$　　C．$\dfrac{1}{10}$　　D．$\dfrac{1}{6}$

【答案】A

【分析】首先根据已知条件“定位”中间数字，其次在剩余的四个数字中任取两个数字，放置在首或末位，则其余数字排列方式唯一确定.最后由古典概型计算公式即可得解

【详解】由 1，2，3，4，5 组成的没有重复数字的五位数共$A_5^5=120$ 个，前 3 个数字保持递减，后 3 个数字保持递增，说明中间数字为 1；

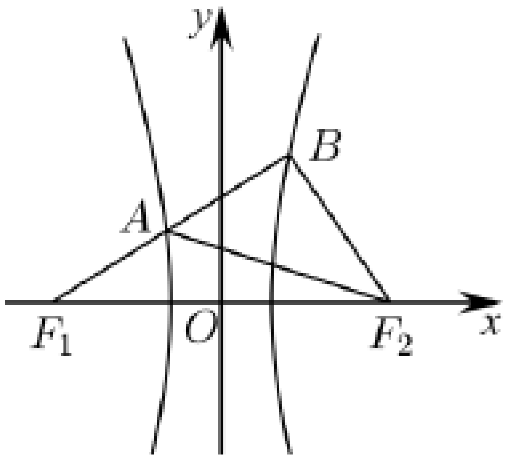
在剩余的四个数字中任取两个数字，按照递减顺序,仅有一种排列方式放置在首两位（或末两位），则剩余两位数字排列方式唯一确定，放置在最后两位（或首两位）.$C_4^2?1=6$

因此"前 3 个数字保持递减，后 3 个数字保持递增"的五位数有 $C_4^2=6$ 个，

所以所求的概率 $P=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$．

故选：A．

11．如图所示，F_1，F_2 是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，$C$ 的右支上存在一点 B 满足 $BF_1\perp BF_2$，BF_1 与 C 的左支的交点 A 满足 $\dfrac{\sin\angle AF_2F_1}{\sin\angle AF_2B}=\dfrac{|BF_2|}{|F_1F_2|}$，则双曲线 C 的离心率为（　）



A．3　　　　B．$2\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{13}$　　　　D．$\sqrt{15}$

【答案】C

【分析】在 $\triangle ABF_2$ 和 $\triangle AF_1F_2$ 中，由正弦定理结合条件 $\dfrac{\sin\angle AF_2F_1}{\sin\angle AF_2B}=\dfrac{|BF_2|}{|F_1F_2|}$ 得到 $|AB|=|AF_1|$，设 $|AB|=|AF_1|=x$（$x>0$），由双曲线的定义和勾股定理得到 $x=3a$，结合 $|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2$ 即可求解.

【详解】在 $\triangle ABF_2$ 中，由正弦定理得：$\dfrac{|AB|}{\sin\angle AF_2B}=\dfrac{|BF_2|}{\sin\angle BAF_2}$ ①，

在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由正弦定理得：$\dfrac{|AF_1|}{\sin\angle AF_2F_1}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1AF_2}$ ②，

又 $\angle BAF_2+\angle F_1AF_2=\pi$，则 $\sin\angle BAF_2=\sin\angle F_1AF_2$，

所以 $\dfrac{①}{②}$ 得：$\dfrac{|AB|}{\sin\angle AF_2B}\cdot\dfrac{\sin\angle AF_2F_1}{|AF_1|}=\dfrac{|BF_2|}{|F_1F_2|}$，

又 $\dfrac{\sin\angle AF_2F_1}{\sin\angle AF_2B}=\dfrac{|BF_2|}{|F_1F_2|}$，则 $\dfrac{|AB|}{|AF_1|}\cdot\dfrac{|BF_2|}{|F_1F_2|}=\dfrac{|BF_2|}{|F_1F_2|}$，即 $|AB|=|AF_1|$；

设 $|AB|=|AF_1|=x$（$x>0$），由双曲线的定义得：$|BF_1|=2x$，$|BF_2|=2x-2a$，$|AF_2|=x+2a$，

由 $BF_1\perp BF_2$ 得：$|AF_2|^2=|AB|^2+|BF_2|^2\Rightarrow(x+2a)^2=x^2+(2x-2a)^2$，解得：$x=3a$，

所以$|BF_1|=6a$，$|BF_2|=4a$，

在$\triangle BF_1F_2$中，由勾股定理得：$|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2\Rightarrow(2c)^2=(6a)^2+(4a)^2$，

整理得：$c^2=13a^2$，即双曲线C的离心率$e=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{13}$，

故选：C.

12．已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(2x+2)$为偶函数，$f(x+1)$为奇函数，且当$x\in[0,1]$时，$f(x)=ax+b$．若$f(4)=1$，则$\sum\limits_{i=1} f\left(i+\dfrac{1}{2}\right)=$（　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．0　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．-1

【答案】C

【分析】由$f(2x+2)$为偶函数，$f(x+1)$为奇函数得到$f(x+5)=f(x+1)$，故函数$f(x)$的周期$T=4$，结合$f(4)=1$得到$b=1$，由$f(-x+1)=-f(x+1)$得$f(1)=0$，从而求出$a=-1$，采用赋值法求出$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，再使用求出的$f(x)$的周期$T=4$，赋值法得到$f\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

【详解】因为$f(2x+2)$为偶函数，所以$f(-2x+2)=f(2x+2)$，

用$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$代替$x$得：$f(-x+1)=f(x+3)$，

因为$f(x+1)$为奇函数，所以$f(-x+1)=-f(x+1)$，

故$f(x+3)=-f(x+1)$①，

用$x+2$代替x得：$f(x+5)=-f(x+3)$②，

由①② 得：$f(x+5)=f(x+1)$，

所以函数$f(x)$的周期$T=4$，

所以$f(4)=f(0)=1$，即$b=1$，

因为$f(-x+1)=-f(x+1)$，令$x=0$得：$f(1)=-f(1)$，故$f(1)=0$，

$f(1)=a+b=0$，解得：$a=-1$，

所以$x\in[0,1]$时，$f(x)=-x+1$，

因为 $f(-x+1)=-f(x+1)$，

令 $x=\frac{1}{2}$，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)$，

其中 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$，所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，

因为 $f(-2x+2)=f(2x+2)$，

令 $x=\frac{1}{4}$ 得：$f\left(-2\times\frac{1}{4}+2\right)=f\left(2\times\frac{1}{4}+2\right)$，即 $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，

因为 $T=4$，所以 $f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}-4\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，

因为 $f(-x+1)=-f(x+1)$，

令 $x=\frac{3}{2}$ 得：$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}$，

故 $f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}$，

$\sum\limits_{i=1} f\left(i+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

故选：C

【点睛】方法点睛：抽象函数的对称性和周期性：

若 $f(x+a)+f(-x+b)=c$，则函数 $f(x)$ 关于 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 中心对称，

若 $f(x+a)=f(-x+b)$，则函数 $f(x)$ 关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称，

若函数 $f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称，关于 $(b,0)$ 中心对称，则函数 $f(x)$ 的周期为 $4|a-b|$，

若函数 $f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称，关于 $x=b$ 轴对称，则函数 $f(x)$ 的周期为 $2|a-b|$，

若函数 $f(x)$ 关于 $(a,0)$ 中心对称，关于 $(b,0)$ 中心对称，则函数 $f(x)$ 的周期为 $2|a-b|$.

第 II 卷

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．在一组样本数据中，1，3，5，7 出现的频率分别为 p_1，p_2，p_3，p_4，且 $\sum\limits_{i=1} p_i=1$，若这组数据的中位

数为 2，则 $p_1=$______.

【答案】0.5 ## $\frac{1}{2}$

【分析】分析得到样本数据从小到大排序后中间两个数为 1，3，即得解.

【详解】∵样本数据中只有 1，3，5，7，没有 2，

∴样本数据一共有偶数个数，且从小到大排序后中间两个数为 1，3，

∴样本数据中有一半是 1，∴ $p_1=0.5$.

故答案为：0.5

14．已知实数 x，y 满足：$(x+2)^2+(y-1)^2=1$，则 $|1-2x+y|$ 的取值范围是______.

【答案】$[6-\sqrt{5},6+\sqrt{5}]$

【分析】方法一：采用三角换元法，然后利用两角差的正弦公式集合求解；

方法二：利用 $|1-2x+y|$ 的几何意义：可以看作圆心 $(-2,1)$ 到直线 $2x-y-1=0$ 距离的 $\sqrt{5}$ 倍，然后利用点到直线的距离公式即可求解.

【详解】解法一：因为 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$，所以令 $x+2=\cos\theta$，$y-1=\sin\theta$，

则 $x=-2+\cos\theta$，$y=1+\sin\theta$，

故 $|1-2x+y|=|6+\sin\theta-2\cos\theta|=|6+\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin\theta-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta\right)|=\left|6+\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)\right|$，其中 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，因为 $-\sqrt{5}\le\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)\le\sqrt{5}$，

所以 $6-\sqrt{5}\le 6+\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)\le 6+\sqrt{5}$，

所以 $6-\sqrt{5}\le 6+\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)|\le 6+\sqrt{5}$，

故 $|1-2x+y|$ 的取值范围为 $[6-\sqrt{5},6+\sqrt{5}]$.

解法二：因为圆心 $(-2,1)$ 到直线 $2x-y-1=0$ 的距离 $d=\frac{|-4-1-1|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{5}\sqrt{5}$，

所以圆心上的点到直线 $2x-y-1=0$ 的距离的取值范围为 $\left[\frac{6}{5}\sqrt{5}-1,\frac{6}{5}\sqrt{5}+1\right]$，

又因为 $|2x-y-1|=\sqrt{5}\cdot\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}$，

所以$|2x-y-1|$的取值范围是$[6-\sqrt{5},6+\sqrt{5}]$.

故答案为：$[6-\sqrt{5},6+\sqrt{5}]$.

15. 在函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x-\varphi\right)\left(\varphi>0\right)$图象与$x$轴的所有交点中，点$\left(\frac{\varphi}{2},0\right)$离原点最近，则$\varphi$可以等于__________（写出一个值即可）.

【答案】$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）

【分析】先求出$f\left(x\right)$与x轴的所有交点，再结合题意得到$\left|\frac{\varphi}{2}\right|\le\left|\frac{\varphi}{2}+\frac{k}{2}\pi\right|$恒成立，整理得$k\left(\varphi+\frac{k}{2}\pi\right)\ge 0$，分类讨论$k\ge 1$，$k\le -1$与$-1<k<1$三种情况，结合恒成立可得到$0<\varphi\le\frac{\pi}{2}$，从而得解.

【详解】因为$f\left(x\right)=\sin\left(2x-\varphi\right)\left(\varphi>0\right)$，

令$f\left(x\right)=0$，即$\sin\left(2x-\varphi\right)=0$，得$2x-\varphi=k\pi,k\in Z$，即$x=\frac{\varphi}{2}+\frac{k}{2}\pi,k\in Z$，则$f\left(x\right)$图象与$x$轴的所有交点为$\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{k}{2}\pi,0\right),k\in Z$，

因为其中点$\left(\frac{\varphi}{2},0\right)$离原点最近，所以$\left|\frac{\varphi}{2}\right|\le\left|\frac{\varphi}{2}+\frac{k}{2}\pi\right|,k\in Z$恒成立，

不等式两边平方整理得$k\left(\varphi+\frac{k}{2}\pi\right)\ge 0$，

当$k\ge 1$时，$\varphi+\frac{k}{2}\pi\ge 0$，因为$\varphi>0$，故$\varphi+\frac{k}{2}\pi\ge 0$恒成立；

当$k\le -1$时，$\varphi+\frac{k}{2}\pi\le 0$，即$\varphi\le -\frac{k}{2}\pi$恒成立，因为$-\frac{k}{2}\pi\ge\frac{\pi}{2}$，则$\varphi\le\frac{\pi}{2}$，故$0<\varphi\le\frac{\pi}{2}$；

当$-1<k<1$，即$k=0$时，显然上述不等式恒成立，

综上，由于上述分类情况要同时成立，故$0<\varphi\le\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi$可以等于$\frac{\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）.

16. 已知函数$f\left(x\right)=4e\ln x-\frac{x^2}{x-e\ln x}+mx$存在 4 个零点，则实数$m$的取值范围是__________.

【答案】

【分析】方程根的数量转化为函数图像的交点个数，利用复合函数结合图形共同分析可以求解.

【详解】转化为$f\left(x\right)=4e\ln x-\frac{x^2}{x-e\ln x}+mx=0$有四个解，

即$4e\ln x-\frac{x^2}{x-e\ln x}+mx=0$在$x>0$范围内有四个解，

即 $4\dfrac{e\ln x}{x}-\dfrac{x}{x-e\ln x}+m=0$ 在 $x>0$ 范围内有四个解，

即 $\dfrac{x}{x-e\ln x}-4\dfrac{e\ln x}{x}=m$ 在 $x>0$ 范围内有四个解，

即 $\dfrac{1}{1-\dfrac{e\ln x}{x}}-4\dfrac{e\ln x}{x}=m$ 在 $x>0$ 范围内有四个解，

令 $g(x)=\dfrac{e\ln x}{x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{e(1-\ln x)}{x^2}$，

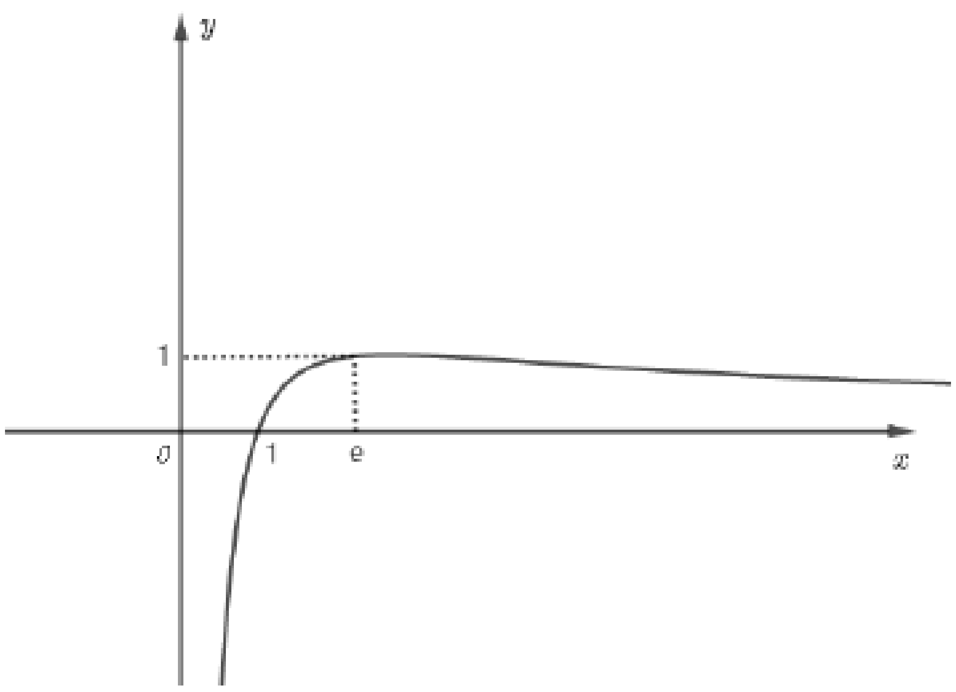
令 $g'(x)=0$ 得 $x=e$，

所以当 $0<x<e$ 时， $g'(x)>0$， 当 $x>e$ 时， $g'(x)<0$，

所以 $g(x)=\dfrac{e\ln x}{x}$ 在 $(0,e)$ 单调递增，在 $(e,+\infty)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(e)=1$，

做出 $g(x)$ 大致图像如下：



令 $t=g(x)=\dfrac{e\ln x}{x}$，

则原方程转化为 $\dfrac{1}{1-t}-4t=m(t<1)$，

令 $h(t)=\dfrac{1}{1-t}-4t$，

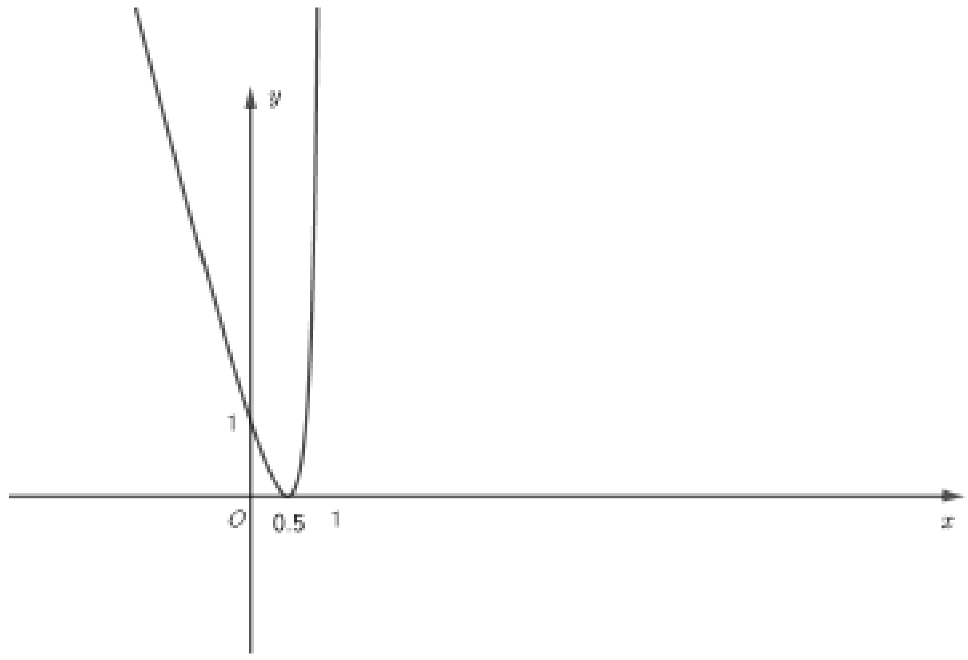
$h'(t)=\dfrac{1}{(1-t)^2}-4$，

令 $h'(t)=0$ 得 $t=\dfrac{1}{2}$，

当$t<\frac{1}{2}$时，$h'(t)<0$，当$\frac{1}{2}<t<1$时，$h'(t)>0$，

所以$h(t)$在$(-\infty,\frac{1}{2})$递减，在$(\frac{1}{2},1)$递增，

做出$h(x)$大致图像如下：



所以$m\in(0,1)$时，对应解出两个t值，

从而对应解出四个x值，

故答案为：$m\in(0,1)$.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17．在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$2c+b=2a\cos B$.

(1)求角 A；

(2)若角 A 的平分线与BC交于点M，$BM=4\sqrt{7}$，$CM=2\sqrt{7}$，求线段AM的长.

【答案】(1)$A=\frac{2\pi}{3}$

(2)4

【分析】(1）利用余弦定理角化边或利用正弦定理边化角即可求解；

（2）在$\triangle ABM$ 和$\triangle ACM$ 中用两次正弦定理可得$c=2b$，然后在$\triangle ABC$中利用余弦定理可得b,c的长度，进而可得$\cos B$的大小，再在$\triangle ABM$ 中利用余弦定理即可求解.

【详解】(1）解法一：由余弦定理可得$2c+b=2a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

即$2c^2+bc=a^2+c^2-b^2$，整理可得$b^2+c^2-a^2=-bc$，

所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，

因为$0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$.

解法二：由正弦定理可得$2\sin C+\sin B=2\sin A\cos B$，

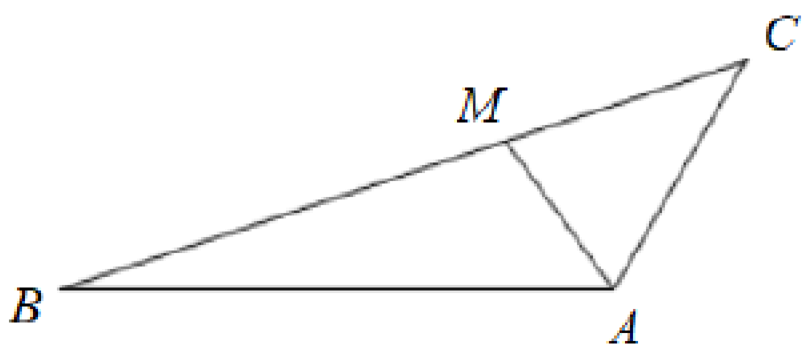
因为$\triangle ABC$， $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以$2\cos A\sin B+\sin B=0$，

因为$\sin B\neq 0$，所以$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，

因为$0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）如图所示



由题意可得AM 是角A的平分线，$A=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle BAM=\dfrac{\pi}{3}$，

在$\triangle ABM$ 中，由正弦定理可得$\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}=\dfrac{AM}{\sin B}$，

即$\dfrac{4\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{AM}{\sin B}$，解得$\sin B=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}AM}{4\sqrt{7}}$，