21.1 &21.2 整式方程

课程要求

了解要求，做到心中有数

理解一元整式方程及高次方程、二项方程的有关概念.

基本知识

夯实基础，建立完整知识体系

1. 一元整式方程和高次方程的概念

如果方程中只有一个未知数且两边都是关于未知数的整式,那么这个方程叫做一元整式方程.

如果经过整理的一元整式方程中含未知数的项的最高次数是 n（ 是正整数），那么这个方程叫做一元 n 次方程；其中次数 n 大于 2 的方程统称为一元高次方程，简称高次方程.

【注意】对于形式比较复杂的方程要先整理化简再判断方程的类型.

2. 含字母系数的一元整式方程的解法

【思考】请用方程解决下面的实际问题：买 a（ 是正整数）本同样的练习本共需 12 元钱，求练习本的单价.

解：设练习本的单价是 x 元，

根据题意可得方程 $ax=12$，

因为 a 是正整数，即 $a\neq 0$

两边同 除以 a（或乘以 $\frac{1}{a}$），得 $x=\frac{12}{a}$.

所以，原方程的根是 $x=\frac{12}{a}$.

在上面这个问题中，x 是未知数，a 是用字母表示的已知数、即在项 ax 中字母 a 是项的系数，我们把这样的字母叫做字母系数，上面问题中列出的方程叫做含字母系数的一元一次方程.

3. 二项方程的概念及解法

二项方程：

如果一元 n 次方程的一边只有含未知数的一项和非零的常数项，另一边是零，那么这个方程就叫做二项方程.

常考题型

一般形式：关于 x 的一元 n 次二项方程的一般形式为$ax^n+b=0\left(a\neq 0,b\neq 0,n\text{正整数}\right)$

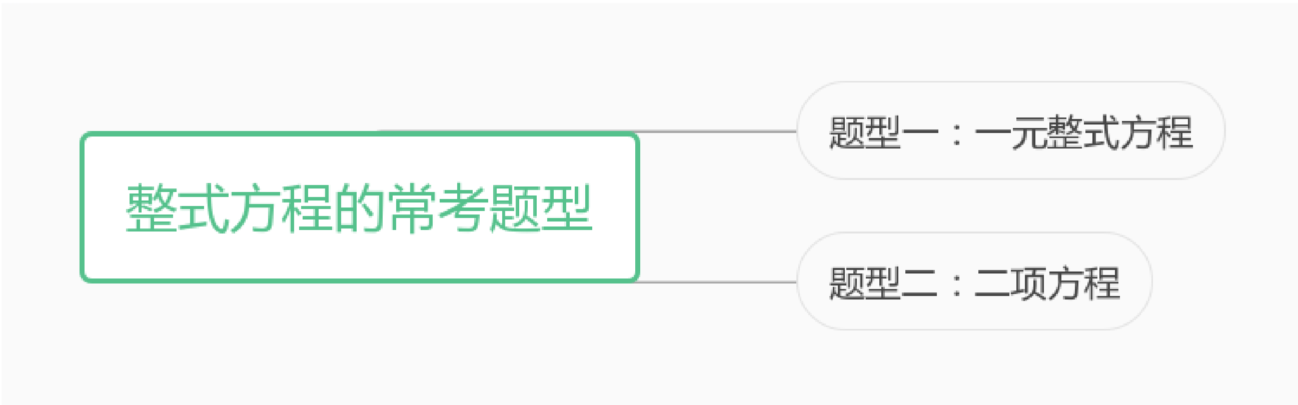
二项方程的解法：

一般地，关于 x 的的一元 n 次二项方程$ax^n+b=0\left(a\neq 0,b\neq 0,n\text{正整数}\right)$可变形为$x^n=-\frac{b}{a}$，，因此解一元 n（ n>2）次二项方程可转化为求一个已知数的 n 次方根.

当 n 为奇数时，方程有且只有一个实数根.

当 n 为偶数时，如果 ab<0 ，那么方程有两个实数根且这两根互为相反数；如果 ab>0，那么方程没有实数根.

常考题型



题型精析

模块化学习，塑造解题能力

题型一 一元整式方程

【例题 1-1】一元二次方程$4x^2-x+5=0$的二次项系数、一次项系数、常数项分别是（ ）

A．4，0，5 B．1，-1，5 C．4，1，5 D．4，-1，5

【答案】D

【分析】一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（a，b，c为常数，$a\neq 0$），根据一元二次方程的一般形式得出答案即可.

【详解】解：一元二次方程$4x^2-x+5=0$的二次项系数、一次项系数、常数项分别是4，-1，5，

故选：D.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的一般形式，在确定二次项系数，一次项系数，常数项时，注意不要漏掉符号．

【例题 1-2】在实数范围内，方程 $x^4-16=0$ 的实数根的个数是（　）

A．1　B．2　C．3　D．4

【答案】B

【分析】先移项得出 $x^4=16$，再根据四次方根的定义求出方程的解即可．

【详解】解：$x^4-16=0$，

$x^4=16$，

$x=\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$，

即方程 $x^4-16=0$ 的实数根的个数是 2，

故选：B．

【点睛】本题考查了解高次方程，能求出 $x=\pm\sqrt[4]{16}$ 是解此题的关键．

【例题 1-3】将关于 x 的一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 变形为 $x^2=px-q$，就可以将 x^2 表示为关于 x 的一次多项式，从而达到“降次”的目的，又如 $x^3=x\cdot x^2=x(px-q)=\cdots$，我们将这种方法称为“降次法”，通过这种方法可以化简次数较高的代数式．根据“降次法”，已知：$x^2-x-1=0$，且 $x>0$，则 x^3-2x^2+2x+1 的值为（　）

A．$1-\sqrt{5}$　B．$1+\sqrt{5}$　C．$3-\sqrt{5}$　D．$3+\sqrt{5}$

【答案】B

【分析】由题可知 $x^2=x+1$，将所求式子变形为 $x(x+1)-2(x+1)+2x+1$ 再求解即可．

【详解】解：$\because x^2-x-1=0$，

$\therefore x^2=x+1$，

$\therefore x^3-2x^2+2x+1$

$=x(x+1)-2(x+1)+2x+1$

$=x^2+x-2x-2+2x+1$

$=x^2+x-1$

$=(x+1)+x-1$

$=2x$，

$\because x^2-x-1=0$，

$\therefore a=1,b=-1,c=-1$，

∴ $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4\times 1\times(-1) = 5$，

解得 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，

∵ $x>0$，

∴ $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

∴ $x^3-2x^2+2x+1=1+\sqrt{5}$，

故选：B.

【点睛】本题考查高次方程的解，理解题中所给降次的方法，灵活降次，准确求一元二次方程的根是解题的关键.

【变式 1-1】下列方程是一元高次方程的是（　）

A．$x+3=0$　B．$x^2-3x-1=0$　　C．$x^3+2x+\frac{1}{x}=0$ D．$x^4+1=0$

【答案】D

【分析】根据一元高次方程的定义：只含一个未知数，未知项的最高次数大于等于 3 的整式方程，即可得出答案.

【详解】解：这四个方程都只含一个未知数，

∵A，B 中未知数的项的次数小于等于 2，

∴A，B 选项不是一元高次方程，不符合题意，

∵C 中分母中含有未知数，

∴是分式方程，

∴C 选项不符合题意，

∵D 符合一元高次方程定义：只含一个未知数，未知项的最高次数大于等于 3 的整式方程，

∴D 选项符合题意，

故选：D.

【点睛】本题考查了一元高次方程的定义，注意几元几次方程都首先是整式方程.

【变式 1-2】如果 $x=2$ 是方程 $\frac{1}{2}x+a=-1$ 的解，那么 a 的值是（　）

A．－2 B．2　C．0　D．－6

【答案】A

【分析】把 $x=2$ 代入方程 $\frac{1}{2}x+a=-1$，得出关于 a 的方程，求出方程的解即可.

【详解】解：把 $x=2$ 代入方程 $\frac{1}{2}x+a=-1$ 得：$2\times\frac{1}{2}+a=-1$，

解得：$a=-2$，

故选：A.

【点睛】本题主要考查一元一次方程的解及解法，熟练掌握一元一次方程的解及解法是解题的关键.

【变式 1-3】若一元二次方程式 $ax(x+1)+(x+1)(x+2)+bx(x+2)=2$ 的两根为 0．2，则 $|3a+4b|$ 之值为何（　）

A．2　B．5　C．7　D．8

【答案】B

【分析】先根据一元二次方程式 $ax(x+1)+(x+1)(x+2)+bx(x+2)=2$ 的根确定 a、b 的关系式．然后根据 a、b 的关系式得出 $3a+4b=-5$．用求绝对值的方法求出所需绝对值.

【详解】将两根 0，2 分别代入 $ax(x+1)+(x+1)(x+2)+bx(x+2)=2$ 的中计算得 $3a+4b=-5$，所以 $|3a+4b|=5$，故选 B.

【点睛】此题考查了一元二次方程及绝对值的运用.

【同步测试 1-1】如果关于 x 的方程 $(m+2)x=8$ 无解，那么 m 的取值范围是（　　）

A． $m>-2$　B． $m=-2$　C． $m\neq-2$　D．任意实数

【答案】B

【分析】根据 ax=b 中当 a=0, b≠0 方程无解可知当 m+2=0 时关于 x 的方程 $(m+2)x=8$ 无解.

【详解】解：由题意得

当 m+2=0 时关于 x 的方程 $(m+2)x=8$ 无解

解得 m=-2，

故选 B.

【点睛】本题考查了解一元一次方程无解的情况，根据题意得出关于 m+2=0 是解题关键.

【同步测试 1-2】方程 $x^2-\sqrt{2}x=0$ 的根是______.

【答案】 $x_1=0, x_2=\sqrt{2}$.

【分析】方程利用因式分解法求出解即可.

【详解】解：方程分解得：$x\left(x-\sqrt{2}\right)=0$，

可得 $x=0$ 或 $x-\sqrt{2}=0$，

解得：$x_1=0, x_2=\sqrt{2}$，

故答案为 $x_1=0, x_2=\sqrt{2}$

【点睛】此题考查了解一元二次方程－因式分解法，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键．

【同步测试 1-3】若实数 m，n 满足 $m+n=\sqrt{3}mn$，且 $n\neq0$ 时，就称点 $P(m, \frac{m}{n})$ 为“完美点”，若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上存在两个“完美点” A，B，且 $AB=\frac{8}{3}$，则 k 的值为_____．

【答案】$\frac{5\sqrt{3}}{4}$

【分析】先得出完美点所在的函数解析式，再利用韦达定理求出 k 的值，进而得出答案．

【详解】解：$\because m+n=\sqrt{3}mn$ 且 $n\neq0$，

$\therefore \frac{m}{n}+1=\sqrt{3}m$，即 $\frac{m}{n}=\sqrt{3}m-1$，

$\therefore p\left(m, \sqrt{3}m-1\right)$，

即“完美点” p 在直线 $y=\sqrt{3}x-1$ 上，设点 A、B 坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，

令 $\frac{k}{x}=\sqrt{3}x-1$，化简得 $\sqrt{3}x^2-x-k=0$，

$\because AB=\frac{8}{3}$，

$\therefore |x_1-x_2|=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，

由韦达定理 $x_1+x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}, x_1x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}k$，

$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{16}{3}$，

$\therefore \frac{1}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}k=\frac{16}{3}$，

解得：$k=\frac{5}{4}\sqrt{3}$．

此时 $\sqrt{3}x^2-x-\frac{5}{4}\sqrt{3}=0$ 中，$\Delta>0$，

$\therefore k=\frac{5}{4}\sqrt{3}$，

故答案为$\frac{5}{4}\sqrt{3}$．

【点睛】此题考查了反比例函数以及根与系数的关系等知识，利用反比例函数图象上点的坐标特征是解题关键．

【同步测试 1-4】当 x 为何值时，整式$\frac{x+1}{2}+1$和$\frac{2-x}{4}$的值互为相反数？

【答案】$x=-8$

【分析】利用相反数性质列出方程，求出方程的解即可得到 x 的值．

【详解】解：根据题意得：$\frac{x+1}{2}+1+\frac{2-x}{4}=0$，

去分母得：$2(x+1)+4+(2-x)=0$

去括号得：$2x+2+4+2-x=0$

解得：$x=-8$．

【点睛】此题考查了解一元一次方程，以及相反数，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

题型二 二项方程

【例题 2-1】下列方程中，二项方程是（　　）

A．$x^2+2x+1=0$ B．$x^5+x^2=0$

C．$x^2=1$　　D．$\frac{1}{x}+x=1$

【答案】C

【分析】如果一元 n（n 是正整数）次方程的一边只含有含未知数的一项和非零的常数项，另一边是 0，这样的方程就叫做二项方程，根据定义判断即可．

【详解】解：A．$x^2+2x+1=0$有三项，不符合二项方程定义，故选项不合题意；

B．$x^5+x^2=0$不是二项方程，故选项不符合题意；

C．$x^2=1$可变为$x^2-1=0$，符合二项方程定义．故选项符合题意；

D．$\frac{1}{x}+x=1$是分式方程，故选项不符合题意．

故选：C．

【点睛】本题考查二项方程的定义，掌握二项方程的定义是求解本题的关键．

【例题 2-2】在下列关于x的方程中，不是二项方程的是(　　)

A．$81x^4-16=0$　B．$x^3-1=0$ C．$x^2=8$　　D．$x^3-x=1$

【答案】D

【分析】根据二项方程的定义逐个判断得结论.

【详解】解：把各方程移项，使等号右边为0，满足二项方程的是A、B、C，

由于方程D移项后左边是三项，故选项D不是二项方程.

故选：D.

【点睛】本题考查了二项方程的定义，二项方程的左边只有两项，其中一项含未知数x，这项的次数就是方程的次数；另一项是常数项；方程的右边是0.

【例题2-3】下列方程中，是二项方程的是（　　）

A．$x^2+2x=1$　　B．$x^3+3x=0$　　C．$x=0$　　D．$x^4-8=0$

【答案】D

【分析】二项方程的左边只有两项，其中一项含未知数x，另一项是常数项；方程的右边是0，结合选项进行判断即可.

【详解】解：A．不是二项方程，方程右边不等于0，不符合题意；

B．不是二项方程，方程左边没有常数项，不符合题意；

C．不是二项方程，方程左边没有常数项，不符合题意；

D．是二项方程，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查二项方程的定义，注意二项方程的左边只有两项，一项含未知数，一项是常数，右边为0，熟练掌握二项方程的定义是解决问题的关键.

【例题2-4】下列方程中，是二项方程的是（　　）

A．$\frac{1}{2}x^3+8=0$　　B．$\frac{1}{x^4}-16=0$　C．$x^3+x=1$　D．$x^2=y^2$

【答案】A

【分析】根据二项方程的定义，逐个判断得结论.

【详解】解：二项方程需满足：

①方程是整式方程，

②方程只含有一个未知数，

③方程共两项，三个条件.

∵方程A满足二项方程的条件，

故选项A是二项方程；

方程 B 不满足条件①，

方程 C 不满足条件③，

方程 D 不满足条件②，

故选项 B、C、D 不是二项方程.

故选：A.

【点睛】本题考查了高次方程，掌握二项方程的定义是解决本题的关键.

【变式 2-1】下列方程中：（1）$x^4+1=0$；（2）$ax^n+b=0$；（3）$x^4+x=0$；（4）$x^5+x=1$；是二项方程的有（　　）个.

A．1　B．2　C．3　D．4

【答案】A

【分析】根据两项方程的定义直接判断得结论.

【详解】解：（1）$x^4+1=0$，符合二项方程的定义；

（2）$ax^n+b=0$，当 a=0 时，不符合二项方程的定义；

（3）$x^4+x=0$，两项都含有未知数，不符合二项方程的定义；

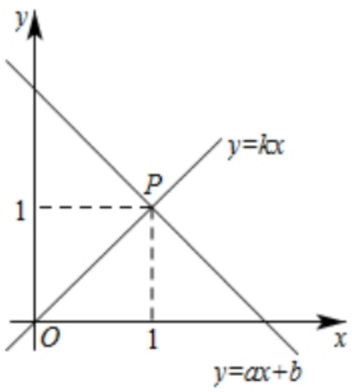
（4）$x^5+x=1$，有三项，不具备二项方程的定义，

综上，只有（1）符合二项方程的条件，共 1 个.

故选：A.

【点睛】本题考查了二项方程的定义，二项方程需满足以下几个基本条件：（1）整式方程，（2）方程共两项，（3）两项中一项含有未知数，一项是常数项.

【变式 2-2】如图，已知一次函数 $y=ax+b$ 的图像与 $y=kx$ 的图像相交于点 P，则二元一次方程组 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=kx \end{cases}$ 的解是________.



【答案】$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

【分析】结合图象，根据一次函数图象与二元一次方程组的关系即可得出答案.

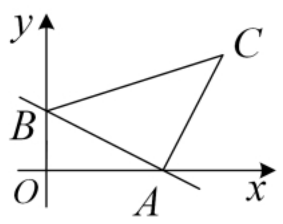
【详解】两条一次函数的交点坐标，即对应的二元一次方程组的解，

因为从图中可以看出交点 $P(1,1)$，所以二元一次方程组 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=kx \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$，

故答案为：$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

【点睛】本题考查了一次函数图象与二元一次方程组的关系，熟练掌握性质和数形结合思想是本题的关键.

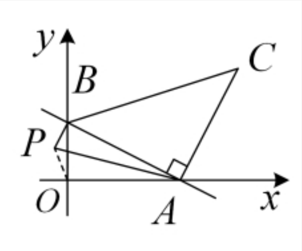
【变式 2-3】如图，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 和 x 轴、y 轴分别交于点 A、点 B，以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰直角 $\triangle ABC$，$\angle BAC=90°$，如果在直角坐标平面内有一点 $P\left(a,\frac{3}{4}\right)$，且 $\triangle ABP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等，则 a 的值为______.



【答案】$\frac{\sqrt{3}}{4}-4$ 或 $4-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【分析】由已知求出 A、B 的坐标，求出三角形 ABC 的面积，再利用 $S_{\triangle}ABP=S_{\triangle}ABC$ 建立含 a 的方程，把 $S_{\triangle}ABP$ 表示成有边落在坐标轴上的三角形面积和、差，通过解方程求得答案.

【详解】解：如图，连接 OP，



∵直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，

∴$A(\sqrt{3}，0)$，$B(0，1)$，$AB=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$，

∴$S_{\triangle}ABP=S_{\triangle}ABC=2$，

又 $S_{\triangle}ABP=S_{\triangle}OPB+S_{\triangle}OAB-S_{\triangle}AOP$，

∴ $|a|\times 1+\sqrt{3}\times 1-\frac{3}{4}\times\sqrt{3}=4$，

解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{4}-4$ 或 $a=4-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{4}-4$ 或 $4-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【点睛】本题考查了一次函数的综合应用；解函数图象与面积结合的问题，要把相关三角形的面积用边落在坐标轴的其他三角形面积来表示，这样面积与坐标之间就建立了联系；把 $S_{\triangle ABP}$ 表示成有边落在坐标轴上的三角形面积和、差是正确解答本题的关键.

【同步测试 2-1】试写出一个二项方程，使得它有一个解为 x=1，这个二项方程可以是________.

【答案】$x^2-1=0$（答案不唯一）

【分析】按要求写出二项、有一个解为 1 的方程即可.

【详解】解：二项方程，使得它有一个解为 x=1，这样的方程不唯一，

比如：$x^2-1=0$，$x-1=0$ 等，

故答案为：$x^2-1=0$（答案不唯一）.

【点睛】本题考查项及方程的解等概念的应用，属开放性题目，答案不唯一，解题的关键是理解项、方程的解等概念.

【同步测试 2-2】函数 $y=y_1+y_2$ 且 $y_1=2x+m$， $y_2=\frac{1}{m-1}x+3$.

(1)若 y_1与y_2 图像的交点的纵坐标为 4，求 y 关于 x 的函数解析式；

(2)若（1）中函数 y 的图像与 x 轴、y 轴交于 A、B 两点，若将此函数绕 A 点顺时针旋转 90°后交 y 轴于 C 点，求直线 AC 的解析式.

【答案】(1) $y=3x+5$

(2) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{9}$

【分析】（1）根据两个函数图象交点的纵坐标为 4，求出 m 的值，然后将 m 代入即可得出 y 关于 x 的函数解析式；

（2）先求出函数图象与 x、y 轴的交点坐标，设 C 的坐标为（0，m），根据 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times BC\times AO$，列出关于 m 的方程，求出 m 的值，利用待定系数法，求出 AC 的关系式即可.

(1)

解：令 $y=4=2x+m$，得 $x=\frac{4-m}{2}$；

令 $y=4=\frac{1}{m-1}x+3$，得：$x=m-1$；

∵是交点，

∴横坐标也一样，

即 $\frac{4-m}{2}=m-1$，解得：$m=2$，

∴ $y=y_1+y_2$

$=2x+m+\frac{1}{m-1}x+3$

$=2x+2+\frac{1}{2-1}x+3$

$=3x+5$

(2)

由函数解析式是 $y=3x+5$，可知 A 的坐标为（$-\frac{5}{3}$，0），B 的坐标是（0，5），∵∵

$\because AC\perp AB$，

∴设 C 的坐标为（0，m），$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times BC\times AO$，

即 $\frac{1}{2}\times\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+5^2}\times\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+m^2}=\frac{1}{2}\times(5-m)\times\left|-\frac{5}{3}\right|$，

整理得 $9m^2+10m+\frac{25}{9}=0$，

即 $\left(3m+\frac{5}{3}\right)^2=0$，解得：$m=-\frac{5}{9}$，

∴ C 的坐标为（$0,-\frac{5}{9}$），

设 AC 的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，把 C（$0,-\frac{5}{9}$），A（$-\frac{5}{3}$，0）的坐标代入，

得：$\begin{cases}-\frac{5}{9}=0\times k+b\\0=-\frac{5}{3}x+b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-\frac{1}{3}\\b=-\frac{5}{9}\end{cases}$，

∴ AC 的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{9}$．

【点睛】本题主要考查了利用待定系数法求直线的解析式：先设直线的解析式为 $y=kx+b$，然后把两已知点的坐标代入得到关于 k、b 的方程组，解方程组即可．根据函数图象的几何变