

河南省安阳市第一中学 2023-2024 学年高一下学期第二次阶段

考试数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 随着老龄化时代的到来,某社区为了探讨社区养老模式,在社区内对 2400 名老年人、2400 名中年人、2100 名青年人用分层抽样方法随机发放了调查问卷 345 份,则在老年人中发放的调查问卷份数是 ()

- A. 110 B. 115 C. 120 D. 125

2. 已知复数 $z = m^2 - 1 + (m + i^2) \cdot i (m \in \mathbf{R})$ 表示纯虚数,则 $m =$ ()

- A. 1 B. -1 C. 1 或 -1 D. 2

3. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 6, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, 则 $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AM}$ 的值为 ()

- A. -6 B. -5 C. -4 D. -3

4. 已知在正四面体 $A-BCD$ 中, M 为 AB 的中点,则直线 CM 与 AD 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{2}{3}$

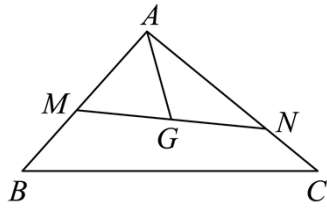
5. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, 则下列结论:

- ①. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\tan \alpha = \sqrt{3}$
②. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
③. 若 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$

其中正确结论的有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 0 个

6. 如图, 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 作直线分别与 AB , AC 两边交于 M , N 两点, 设 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$, 则 $x + 4y$ 的最小值为 ()

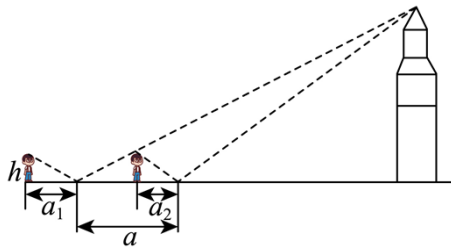


- A. 9 B. 4 C. 3 D. $\frac{5}{2}$

7. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, P 为 DD_1 的中点, 过 A, B, P 三点作平面 α , 则该正方体的外接球被平面 α 截得的截面圆的面积为 ()

- A. $\frac{13\pi}{5}$ B. $\frac{16\pi}{5}$ C. 3π D. $\frac{14\pi}{5}$

8. 在一堂数学实践探究课中, 同学们用镜而反射法测量学校钟楼的高度. 如图所示, 将小镜子放在操场的水平地面上, 人退后至从镜中能看到钟楼顶部的位置, 此时测量人和小镜子的距离为 $a_1 = 1.00\text{m}$, 之后将小镜子前移 $a = 6.00\text{m}$, 重复之前的操作, 再次测量人与小镜子的距离为 $a_2 = 0.60\text{m}$, 已知人的眼睛距离地面的高度为 $h = 1.75\text{m}$, 则钟楼的高度大约是 ()



- A. 27.75m B. 27.25m C. 26.75m D. 26.25m

二、多选题

9. 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列命题为真命题的有 ()

- A. 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 B. 若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \perp n$
 C. 若 $\alpha \parallel \beta, m \parallel \beta$, 则 $m \parallel \alpha$
 D. 若 m, n 为异面直线, $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \parallel \beta, n \parallel \alpha$, 则 $\alpha \parallel \beta$

10. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 下列说法错误的是 ()

- A. 若 $a \cos A = b \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形
 B. 若 $B = 60^\circ, b^2 = ac$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形
 C. 若 $\frac{c-a}{2c} = \sin^2 \frac{B}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形

D. “ $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ ”是“ $\triangle ABC$ 是等边三角形”的充分不必要条件

11. 已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 $\sqrt{2}$, 则 ()

A. 正四面体 $P-ABC$ 的外接球表面积为 4π

B. 正四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离之和为定值

C. 正四面体 $P-ABC$ 的相邻两个面所成二面角的正弦值为 $\frac{1}{3}$

D. 正四面体 $S-EFG$ 在正四面体 $P-ABC$ 的内部, 且可以任意转动, 则正四面体

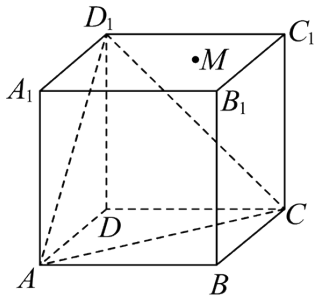
$S-EFG$ 的体积最大值为 $\frac{1}{81}$

三、填空题

12. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 3+4i$, (i 为虚数单位), 则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 在边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 是该正方体表面上一个动点, 且 $BM \parallel$

平面 AD_1C , 则动点 M 的轨迹的长度是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



14. 在直角 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp AC$, $AC = \sqrt{3}$, $AB = 2$, 平面 ABC 内动点 P 满足 $CP = 1$, 则

$\vec{AP} \cdot \vec{BP}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

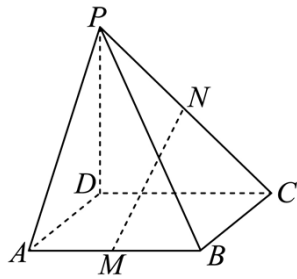
四、解答题

15. 已知 z 是复数, $z+2i$ 和 $\frac{z}{1-i}$ 均为实数, $z_1 = z + \frac{1}{m} - \frac{m}{m-1}i$, 其中 i 是虚数单位.

(1) 求复数 z 的共轭复数 \bar{z} ;

(2) 若复数 z_1 在复平面内对应的点在第一象限, 求实数 m 的取值范围.

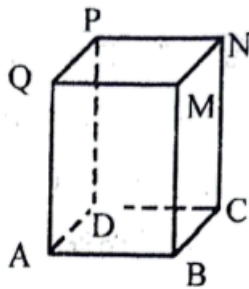
16. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面是边长是 1 的正方形, 侧棱 PA 与底面成 45° 的角, M, N 分别是 AB, PC 的中点.



(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 PAD ;

(2) 二面角 $P-AC-D$ 平面角的正切值.

17. 在直四棱柱 $ABCD-QMNP$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $PB \perp AC$.



(1) 证明: $|PA| = |PC|$

(2) 若 $|PD| = 1, \angle DAB = 60^\circ$, 当 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值最大时, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边为 a, b, c , 且 $\frac{3(\sin A - \sin B)}{\sin C} = \frac{3c - 2b}{a + b}$.

(1) 求 $\sin A$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{4}{3}\sqrt{2}$;

(i) 已知 E 为 BC 的中点, 求 $\triangle ABC$ 底边 BC 上中线 AE 长的最小值;

(ii) 求内角 A 的角平分线 AD 长的最大值.

19. 若 A, B, C 是平面内不共线的三点, 且同时满足以下两个条件: ① $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$; ② 存

在异于点 A 的点 G 使得: \vec{AG} 与 $\vec{AB} + \vec{AC}$ 同向且 $\frac{\vec{AG} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{AG}|$, 则称点 A, B, C 为可

交换点组. 已知点 A, B, C 是可交换点组.

(1) 求 $\angle BAC$;

(2) 若 $A(-1, 0), B(2, \sqrt{3}), C(x, y)(y > 0)$, 求 C 的坐标;

(3) 记 a, b, c 中的最小值为 $\min\{a, b, c\}$, 若 $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 点 P 满足 $|\overrightarrow{PG}| = 1$, 求 $\min\{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}\}$ 的取值范围.

参考答案:

1. C

【分析】设在老年人中发放的调查问卷份数为 x ，根据分层抽样的性质列方程求解.

【详解】设在老年人中发放的调查问卷份数为 x ，

$$\text{则 } \frac{x}{2400} = \frac{345}{2400 + 2400 + 2100},$$

解得 $x = 120$.

所以在老年人中发放的调查问卷份数是 120.

故选: C.

2. B

【分析】根据题意结合复数的相关概念列式求解即可.

【详解】因为 $z = m^2 - 1 + (m + i^2) \cdot i = m^2 - 1 + (m - 1) \cdot i$,

若复数 z 表示纯虚数, 则 $\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $m = -1$.

故选: B.

3. A

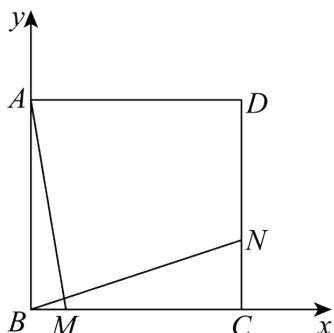
【分析】方法一: 建立如图平面直角坐标系, 利用平面向量数量积的坐标表示即可求解; 方

法二: 利用平面向量的线性运算和数量积的运算律计算即可求解.

【详解】方法一: 如图所示, 建立以 B 为原点的平面直角坐标系,

得 $B(0,0), M(1,0), A(0,6), N(6,2)$, 则 $\overrightarrow{AM} = (1, -6), \overrightarrow{BN} = (6, 2)$,

故 $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AM} = 6 \times 1 + 2 \times (-6) = -6$.



方法二: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$,

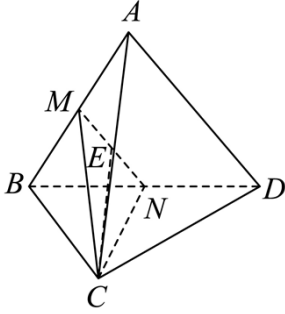
故 $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}^2 = \frac{1}{6} \times 36 - \frac{1}{3} \times 36 = -6$.

故选：A

4. C

【分析】根据给定条件，作出异面直线 CM 与 AD 所成角，再在三角形中求解即得.

【详解】设正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 2，取 BD 的中点 N ，连接 MN ， CN ，如图，



由 M 是 AB 的中点，得 $MN \parallel AD$ ，则 $\angle CMN$ 是 CM 与 AD 所成的角或其补角，

显然 $MC = NC = \sqrt{3}$ ，取 MN 的中点 E ，连接 CE ，则 $CE \perp MN$ ，

在 $\triangle CME$ 中， $ME = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}$ ，因此 $\cos \angle CME = \frac{ME}{CM} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ，

所以直线 CM 与 AD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

故选：C

5. B

【分析】根据向量共线的坐标表示判断①，根据数量积的坐标表示判断②，首先求出 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ ，再根据数量积的定义求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，最后根据数量积的运算律判断③.

【详解】向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ， $\vec{b} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ，

若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $\sin \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha$ ，解得 $\tan \alpha = \sqrt{3}$ ，故①正确；

若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = 0$ ，解得 $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故②正确；

因为 $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$ ，

若 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$ ，

故 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 - 2 + 1} = \sqrt{3}$ ，故③错误.

故选：B

6. C

【分析】借助平面向量线性运算与三点共线定理及基本不等式计算即可得.

【详解】由点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $\vec{AM} = x\vec{AB}$, $\vec{AN} = y\vec{AC}$,

$$\text{故 } \vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\vec{AM} + \frac{1}{y}\vec{AN}\right) = \frac{1}{3x}\vec{AM} + \frac{1}{3y}\vec{AN},$$

由 G 、 M 、 N 三点共线, 故 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{3y} = 1$,

$$\text{则 } x + 4y = (x + 4y)\left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{3y}\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4y}{3x} + \frac{x}{3y} \geq \frac{5}{3} + 2\sqrt{\frac{4y}{3x} \cdot \frac{x}{3y}} = 3,$$

当且仅当 $\frac{4y}{3x} = \frac{x}{3y}$, 即 $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

故选: C.

7. D

【分析】根据给定条件, 求出球心 O 到平面 α 的距离, 再利用球的截面小圆性质求出截面圆半径即可.

【详解】正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球球心是 BD_1 的中点 O , 而 $BD_1 \perp \alpha = B$,

则点 O 到平面 α 的距离 h 等于点 D_1 到平面 α 的距离的一半, 又平面 α 过线段 DD_1 的中点 P ,

因此点 D_1 与点 D 到平面 α 的距离相等, 由 $AB \perp$ 平面 ADD_1A_1 , $AB \subset \alpha$, 得 $\alpha \perp$ 平面 ADD_1A_1 ,

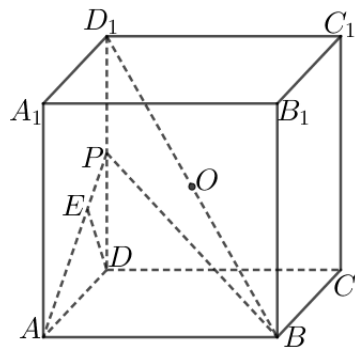
在平面 ADD_1A_1 内过 D 作 $DE \perp AP$ 于 E , 而 $\alpha \perp$ 平面 $ADD_1A_1 = AP$, 于是 $DE \perp \alpha$,

又 $AP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, 从而 $h = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2} \times \frac{AD \cdot DP}{AP} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 又球 O 的半径 $R = \frac{1}{2}BD_1 = \sqrt{3}$,

则正方体的外接球被平面 α 截得的截面圆半径 r , 有 $r^2 = R^2 - h^2 = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5}$,

所以正方体的外接球被平面 α 截得的截面圆的面积 $S = \pi r^2 = \frac{14\pi}{5}$.

故选: D



8. D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/618046104110006077>