

2023-2024 学年广西桂林市高三下学期开学考试数学

模拟试题

注意事项:

- 1.答题前, 务必将自己的姓名、班级、准考证号填写在答题卡规定的位置上.
- 2.答选择题时, 必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦擦干净后, 再选涂其它答案标号.
- 3.答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米黑色签字笔, 将答案书写在答题卡规定的位置上.
- 4.所有题目必须在答题卡上作答, 在试题卷上答题无效.

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 一个样本容量为 10 的样本数据, 它们组成一个公差为 2 的等差数列 $\{a_n\}$, 若 a_1, a_3, a_7 成等比数列, 则此样本的平均数和中位数分别是 ()

- A. 12, 13 B. 13, 13 C. 13, 12 D. 12, 14

2. 如果椭圆 $\frac{x^2}{k+8} + \frac{y^2}{9} = 1 (k > -8)$ 的离心率为 $e = \frac{1}{2}$, 则 $k =$ ()

- A. 4 B. 4 或 $-\frac{5}{4}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. 4 或 $-\frac{4}{5}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$, 若 $4a_3 = 5a_5$, 则 $a_{13} =$ ()

- A. -2 B. 0 C. 2 D. 4

4. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $m \perp n, n // \alpha$, 则 $m \perp \alpha$
- B. 若 $m // \beta, \beta \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$
- C. 若 $m \perp n, n \perp \beta, \beta \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$
- D. 若 $m \perp \beta, n \perp \beta, n \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$

5. 用 2 个 0, 2 个 1 和 1 个 2 组成一个五位数, 则这样的五位数有 ()

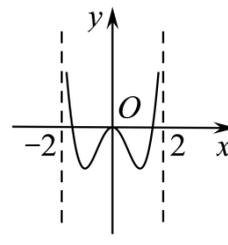
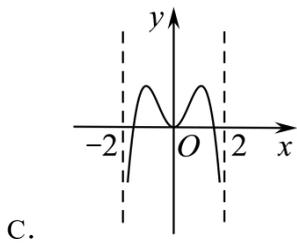
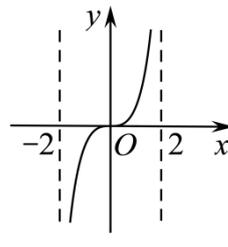
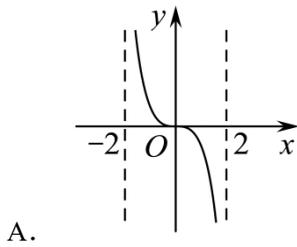
- A. 8 个 B. 12 个 C. 18 个 D. 24 个

6. 已知 $\frac{\pi}{6} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \beta$. 若 $\tan \alpha = 3^k$, $\tan \beta = 3^{-k}$, 则 $k =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

7. 我国著名数学家华罗庚先生曾说：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休。”在数学学习和研究中，常用函数的图象来研究函数性质，也常用函数解析

式来琢磨函数的图象特征，函数 $f(x) = x^2 \log_4 \frac{2+x}{2-x}$ 的大致图象是 ()



8. 设双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$, 离心率为 e , 且 $a, c, a+c$ 成等比数列, A 是 E 的一个顶点, F 是与 A 不在 y 轴同侧的焦点, B 是 E 的虚轴的一个端点, PQ 为 E 的任意一条不过原点且斜率为 $k (k \neq 0)$ 的弦, M 为 PQ 中点, O 为坐标原点, 则下列判断错误的是 ()

- A. E 的一条渐近线的斜率为 \sqrt{e}
 B. $AB \perp BF$
 C. $k_{OM} \cdot k_{PQ} = e$ (k_{OM}, k_{PQ} 分别为直线 OM, PQ 的斜率)
 D. 若 $OP \perp OQ$, 则 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = e$ 恒成立

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 关于函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x + 1$ 有下述四个结论，其中结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称
- C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{7}{12}\pi, 0)$ 对称
- D. $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增

10. 已知 z_1, z_2 为复数, i 是虚数单位, 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $z_1 = 1 + 2i$, 则 z_1 的虚部为 $2i$
- B. 若 $z_1 = 1 + 2i$, z_2 满足 $|z_2 - z_1| = \sqrt{5}$, 则 $|z_2|$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$
- C. 若 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 则 $z_1 z_2 = 0$
- D. 若 $z_1 = (1 + 2i)(a + 3i)$ ($a \in \mathbf{R}$), 且 $z_1 = \bar{z}_1$, 则 $a = -\frac{3}{2}$

11. 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数且 $f(x)$ 不是常函数,

$F(x) = f(1-x) - 1, g(x) = f(x+1) - 1$, 若 $g(x)$ 是奇函数, 则 ()

- A. $y = f(x)$ 的图象关于 $(1, 1)$ 对称
- B. $f(x) = f(x+4)$
- C. $F(x)$ 是奇函数
- D. $F(x)$ 与 $g(x)$ 关于原点对称

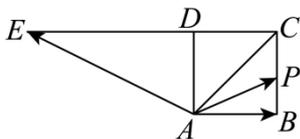
三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x | x = 2t + 1, t \in A\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

13. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3, 4, 5, 且 A, B, C 均在球 O 的球面上, 球心 O 到平面

ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则球 O 的表面积等于_____.

14. 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 延长 CD 至 E , 使得 $DE = 2CD$. 动点 P 从点 A 出发, 沿正方形的边按逆时针方向运动一周回到 A 点, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AE}$. 则 $\lambda - \mu$ 的取值范围为_____.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 已知函数 $f(x) = 3\ln x - x^2 + x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若过点 $(2, 1)$ 作直线与函数 $g(x) = f(x) - 3\ln x + \frac{1}{2}x^3$ 的图象相切，判断切线的条数.

16. 随着寒冷冬季的到来，羽绒服进入了销售旺季，某调查机构随机调查了 400 人，询问他们选购羽绒服时更关注保暖性能还是更关注款式设计，得到以下的 2×2 列联表：

	更关注保暖性能	更关注款式设计	合计
女性	160	80	240
男性	120	40	160
合计	280	120	400

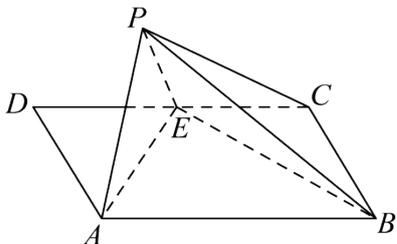
(1) 是否有 95% 的把握认为男性和女性在选购羽绒服时的关注点有差异？

(2) 若从这 400 人中按男女比例用分层抽样的方法抽取 5 人进行采访，再从这 5 人中任选 2 人赠送羽绒服，记 X 为抽取的 2 人中女生的人数，求 X 的分布列和数学期望.

附：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

17. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 2$ ， E 为 CD 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折起，使点 D 到点 P 处，平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$.



(1) 证明：平面 $PAB \perp$ 平面 PBE ；

(2) 求二面角 $C - PA - B$ 的余弦值.

18. 设抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 抛物线 C 上一点 A 的横坐标为 x_1 ($x_1 > 0$),

过点 A 作抛物线 C 的切线 l_1 , 与 x 轴交于点 D , 与 y 轴交于点 E , 与直线 $l: y = \frac{p}{2}$ 交于点 M .
当 $|FD| = 2$ 时, $\angle AFD = 60^\circ$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若 B 为 y 轴左侧抛物线 C 上一点, 过 B 作抛物线 C 的切线 l_2 , 与直线 l_1 交于点 P , 与直线 l 交于点 N , 求 $\triangle PMN$ 面积的最小值, 并求取到最小值时 x_1 的值.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = 2b_1 = 2$, $a_2 = b_4$, $a_5 = 4a_3$,

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, T_{4n} 表示数列 $\left\{ (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot b_n^2 \right\}$ 的前 $4n$ 项和, 集合

$A = \left\{ n \mid \lambda \leq \frac{T_{4n} \cdot b_{n+2}}{a_{n+2}}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$ 共有 4 个元素, 求 λ 范围;

(3) $c_n = \begin{cases} \frac{4\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{b_n}}{a_{n+2} \cdot \sqrt{b_n^2 + 2b_n}}, n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^* \\ a_n \cdot b_n, n = 2k, k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 S_{2n} , 求证:

$$S_{2n} < \frac{25}{18} + \left(\frac{2n}{3} - \frac{2}{9} \right) 4^{n+1}$$

1. B

【分析】首先根据 a_1, a_3, a_7 成等比数列求出数列的首项，然后即可求出样本的平均数和中位数.

【详解】解：依题意 $a_3^2 = a_1 a_7 \Rightarrow (a_1 + 4)^2 = a_1 (a_1 + 6 \times 2)$ ，解得 $a_1 = 4$ ，

故 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 4$ ，公差 $d = 2$ 的等差数列，

所以此样本的平均数为 $\frac{S_{10}}{10} = 13$ ，中位数为 $\frac{a_5 + a_6}{2} = 13$.

故选：B.

本题主要考查了等比中项的性质，中位数，平均数，属于基础题.

2. B

【分析】分焦点在 x 轴和在 y 轴两种情况，分别得到 a, b 的表达式，进而求得 c 的表达式，然后根据离心率得到关于 k 的方程，求解即可.

【详解】解：因为椭圆 $\frac{x^2}{k+8} + \frac{y^2}{9} = 1 (k > -8)$ 的离心率为 $e = \frac{1}{2}$ ，
当 $k+8 > 9$ 时，椭圆焦点在 x 轴上，可得：

$$a = \sqrt{k+8}, b = 3, \therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{k-1}, \therefore e = \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+8}} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } k = 4,$$

当 $0 < k+8 < 9$ 时，椭圆焦点在 y 轴上，可得：

$$a = 3, b = \sqrt{k+8}, \therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1-k}, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{1-k}}{3} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } k = -\frac{5}{4}.$$

$$\therefore k = 4 \text{ 或 } k = -\frac{5}{4}.$$

故选：B.

3. B

【分析】设出等差数列 $\{a_n\}$ 的公差，结合已知利用公差表示 a_3 即可得解.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由 $4a_3 = 5a_5$ ，得 $4a_3 = 5(a_3 + 2d)$ ，整理得 $a_3 = -10d$ ，

所以 $a_{13} = a_3 + 10d = 0$.

故选：B

4. D

【分析】根据空间中点线面的位置关系，即可结合选项逐一求解.

【详解】对于 A, 若 $m \perp n$, $n // \alpha$, 则 $m \subset \alpha$ 或者 $m // \alpha$ 或者 m, α 相交, 故 A 错误,

对于 B, 若 $m // \beta$, $\beta \perp \alpha$, 则 $m \subset \alpha$ 或者 $m // \alpha$ 或者 m, α 相交, 故 B 错误,

对于 C, 若 $m \perp n$, $n \perp \beta$, $\beta \perp \alpha$, 则 $m \subset \alpha$ 或者 $m // \alpha$ 或者 m, α 相交, 故 C 错误,

对于 D, 若 $m \perp \beta$, $n \perp \beta$, 则 $n // m$, 又 $n \perp \alpha$, 所以 $m \perp \alpha$, 故 D 正确,

故选: D.

5. C

【分析】分首位为 2、1 计算出每种情况的结果数, 再相加即可.

【详解】当首位为 2 时, 这样的五位数有 $\frac{A_4^4}{A_2^2 A_2^2} = 6$ 个;

当首位为 1 时, 这样的五位数有 $\frac{A_4^4}{A_2^2} = 12$ 个.

综上, 这样的五位数共有 $6+12=18$ 个.

故选: C.

6. B

【分析】根据题意分析可得 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$, 利用两角和差公式结合指数幂运算求解.

【详解】由题意可得 $\cos \beta = \sin \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) \right] = \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$,

因为 $\frac{\pi}{6} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, 则 $0 < \alpha - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$,

可得 $\beta = \alpha - \frac{\pi}{6}$, 即 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$,

则 $\tan \frac{\pi}{6} = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3^k - 3^{-k}}{1 + 3^k \cdot 3^{-k}} = \frac{3^k - 3^{-k}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

令 $t = 3^k > 0$,

则 $\frac{t - \frac{1}{t}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 整理得 $\sqrt{3}t^2 - 2t - \sqrt{3} = 0$, 解得 $t = \sqrt{3}$ 或 $t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍去),

即 $3^k = \sqrt{3}$, 解得 $k = \frac{1}{2}$.

故选: B.

7. B

【分析】先求函数 $f(x)$ 的定义域，判断 $f(x)$ 是奇函数，故排除 CD；再根据 $f(1)$ 的值，排除 A，从而 B 正确.

【详解】由 $\frac{2+x}{2-x} > 0$ ，得 $(x+2)(x-2) < 0$ ，解得 $-2 < x < 2$ ，

∴ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$ ，

$$\therefore f(-x) = (-x)^2 \log_4 \frac{2-x}{2+x} = -x^2 \log_4 \frac{2+x}{2-x} = -f(x),$$

∴ 函数 $f(x)$ 是奇函数，图象关于原点对称，故排除 CD；

$$\therefore f(1) = \log_4 \frac{2+1}{2-1} = \log_4 3 > \log_4 1 = 0, \text{ 故排除 A, 从而 B 正确.}$$

故选：B.

8. D

【分析】A 选项，由等比中项的性质得到离心率，进而得到 $\frac{b}{a} = \sqrt{e}$ ，A 正确；B 选项，求出

BF 和 AB 的斜率，得到 $k_{BF} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{ac} = -1$ ，得到 $AB \perp BF$ ；C 选项，利用点差法得到

$k_{OM} \cdot k_{PQ} = e$ ；D 选项，设直线 $OP: y = kx$ ，与双曲线方程联立，求出 $|OP|^2$ ，再求出 $|OQ|^2$ ，计

算出 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$ ，判断出结论.

【详解】A 选项，因为 $a, c, a+c$ 成等比数列，所以 $c^2 = ac + a^2$ ，所以 $b^2 = ac$ 且 $e^2 - e - 1 = 0$ ，

解得 $e = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (负根舍)，所以 $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a} = e$ ，所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{e}$ ，即 E 的一条渐近线的斜率

为 \sqrt{e} ，故 A 正确；

B 选项，不妨设 F 为左焦点， B 为虚轴的上端点，则 A 为右顶点，

则 BF 的斜率 $k_{BF} = \frac{b}{c}$ ， AB 的斜率 $k_{AB} = -\frac{b}{a}$ ，所以 $k_{BF} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{ac} = -1$ ，

所以 $AB \perp BF$ ，故 B 正确；

C 选项，设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$ ，则 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$

作差后整理得 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{b^2}{a^2}$ ， $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_0}{x_0} = \frac{b^2}{a^2}$ ，

所以 $k_{PQ} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a} = e$, 故 C 正确;

D 选项, 设直线 $OP: y = kx$, 则直线 $OQ: y = -\frac{1}{k}x$, 将 $y = kx$ 代入双曲线方程

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \text{ 得 } x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2k^2}, \text{ 则 } y^2 = \frac{a^2b^2k^2}{b^2 - a^2k^2},$$

$$\therefore |OP|^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2(k^2 + 1)}{b^2 - a^2k^2},$$

将 k 换成 $-\frac{1}{k}$ 得 $|OQ|^2 = \frac{a^2b^2(k^2 + 1)}{b^2k^2 - a^2},$

则 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{(b^2 - a^2)(k^2 + 1)}{a^2b^2(k^2 + 1)} = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} = \frac{c^2 - 2a^2}{a^2b^2} = \frac{e^2 - 2}{b^2}$ 与 b 的值有关, 故 D 错误.

故选: D.

方法点睛: 直线与圆锥曲线相交涉及中点弦问题, 常用点差法, 该法计算量小, 模式化强,

易于掌握, 若相交弦涉及 $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ 的定比分点问题时, 也可以用点差法的升级版——比点差法, 解法快捷.

9. BCD

【分析】根据三角恒等变换可得 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 即可代入验证求解对称轴以及对称中心,

利用整体法即可判断 D, 根据周期公式即可求解 A.

【详解】 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x + 1 = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$

对于 A, $f(x)$ 的最小正周期为 π , 故 A 错误,

对于 B, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin \frac{3\pi}{2} = -2$, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称, B 正确,

对于 C, $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin \pi = 0$, 故 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7}{12}\pi, 0\right)$ 对称, C 正确,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/618107037103006046>