2023-2024 北京八年级下学期数学期末汇编

压轴题-几何综合

1、（2024北京西城八下期末）在正方形$ABCD$中，E是边BC上的一个动点（不与点B，C重合），连接AE，P为点B关于直线AE的对称点．

（1）连接AP，作射线DP交射线AE于点F，依题意补全图1．

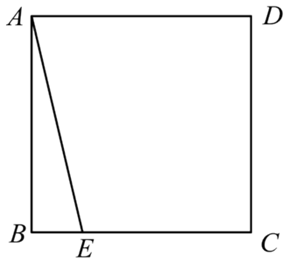
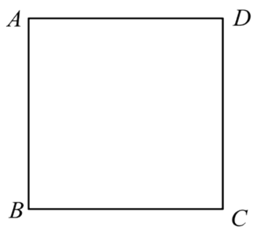


图1

①若$\angle BAE=\alpha$，求ĐADP的大小（用含α的式子表示）；

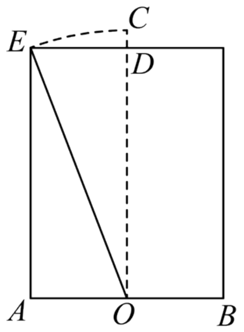
②用等式表示线段AF，PF和PD之间的数量关系，并证明；

（2）已知$AB=2$，连接PC，若$PC\parallel AE$，M，N是正方形$ABCD$的对角线BD上的两个动点，且$BN=BM+\sqrt{2}$，连接EM，AN，直接写出$EM+AN$的最小值．



备用图

2、（2024北京朝阳八下期末）《九章算术》卷九“勾股”中记载：今有池，方一丈，葭生其中央，出水一尺．引葭赴岸，适与岸齐，问水深、葭长各几何．大意是：如图，水池底面的宽$AB=1$丈，芦苇OC生长在AB的中点O处，高出水面的部分$CD=1$尺．将芦苇向池岸牵引，尖端达到岸边时恰好与水面平齐，即$OC=OE$，求水池的深度和芦苇的长度(1丈等于10尺)．



（1）求水池的深度OD；

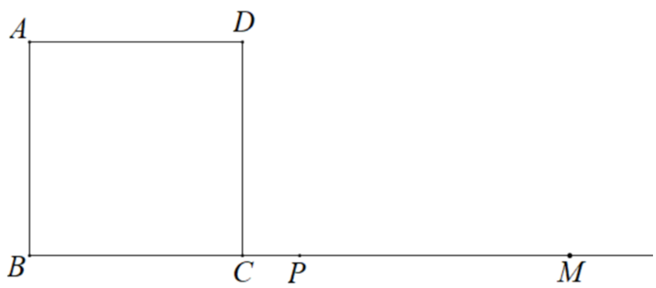
（2）中国古代数学家刘徽在为《九章算术》作注解时，更进一步给出了这类问题的一般解法．他的解法用现代符号语言可以表示为：若已知水池宽$AB=2a$， 芦苇高出水面的部分$CD=n\left(n<a\right)$，则水池的深度OD $\left(OD=b\right)$可以通过公式$b=\dfrac{a^2-n^2}{2n}$计算得到．请证明刘徽解法的正确性．

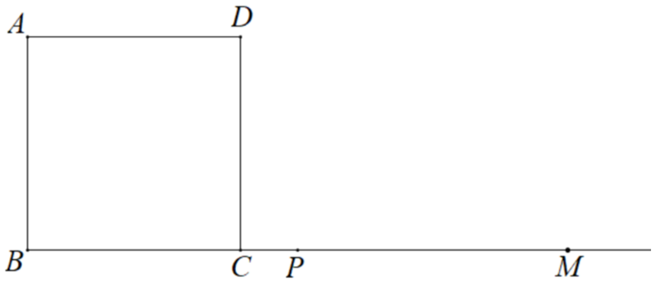
3、（2024北京东城八下期末）如图,正方形ABCD中，点M在BC延长线上，点P是BM的中点，连接AP，在射线BC上方作$PQ\perp AP$，且$PQ=AP$.连接MD，MQ.

（1） 补全图形;

（2） 用等式表示MD与MQ的数量关系并证明；

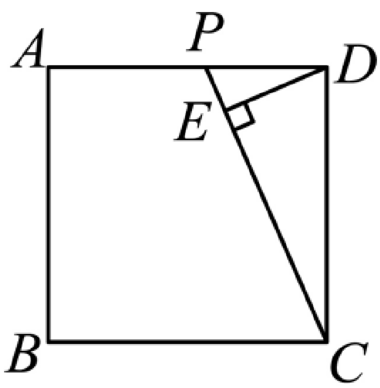
（3） 连接CQ，若正方形边长为5，$CQ=6\sqrt{2}$,直接写出线段CM的长.





(备用图)

4、（2024 北京二中八下期末）如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 P 在边 AD 上，连接 CP，过点 D 作 $DE \perp CP$ 于点 E，延长 ED 至点 F，使 $EF = EC$，连接 BF，CF．



（1）依题意补全图形；

（2）$\angle EFC$ 的度数为__________；

（3）用等式表示线段 BF，DF，EF 之间的数量关系，并证明．

5、（2024 北京平谷八下期末）已知，矩形 $ABCD$，$AD > AB$，对角线 AC，BD 交于点 O，点 M 在射线 BC 上，$\angle DMC = 2\angle DAC$，作 $DE \perp AC$，与 AC 交于点 E，与 BC 交于点 F.

（1）如图 1

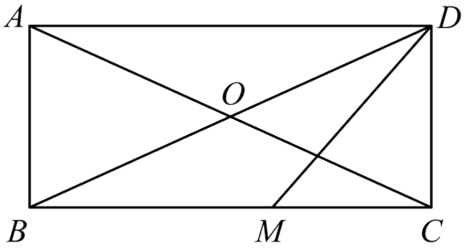


图1

①依题意补全图形，求证：$\angle CDF = \angle DAC$；

②连接 OM，求证：$MO \perp BD$.

（2）当 M 在 BC 延长线上时，依题意补全图 2，并用等式表示线段 CM，FM 与 DA 的数量关系，并证明.

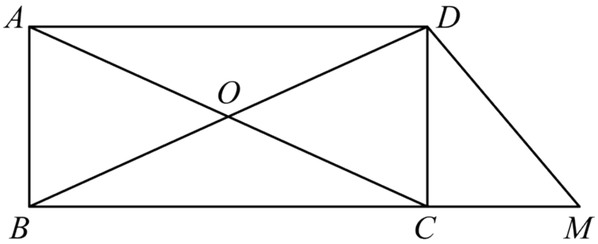


图2

6、（2024 北京石景山八下期末）已知：在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 BC 延长线上一点，且 $CE \neq BC$，连接 DE，过点 D 作 DE 的垂线交直线 AB 于点 F，连接 EF，取 EF 的中点 G，连接 CG.

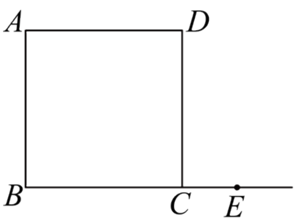


图1

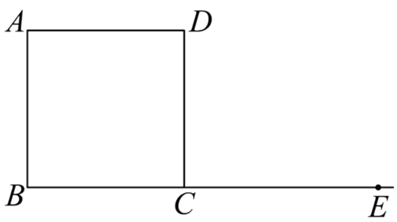


图2

（1）当$CE < BC$时，

①补全图1；

②求证：$\triangle ADF \cong \triangle CDE$；

③用等式表示线段CD，CE，CG之间的数量关系，并证明．

（2）如图2，当$CE > BC$时，请你直接写出线段CD，CE，CG之间的数量关系．

7、（2024北京十一学校八下期末）如图1，在正方形$ABCD$中，点E是边CD上一点，且点E不与C、D重合，过点A作AE的垂线交CB延长线于点F，连接EF．

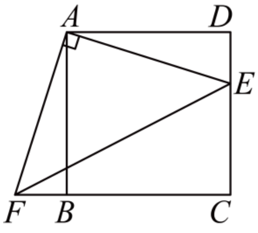


图1

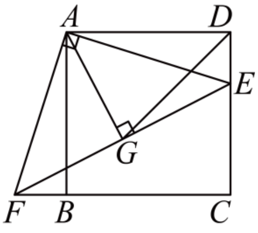
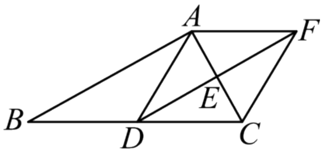


图2

（1）计算$\angle AEF$的度数；

（2）如图2，过点A作$AG \perp EF$，垂足为G，连接DG．用等式表示线段CF与DG之间的数量关系，并证明．

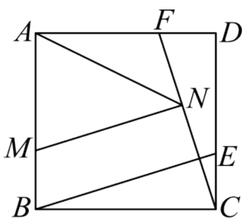
8、（2024 北京清华附中八下期末）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=90^\circ$，点 D，E 分别是 BC，AC 的中点．连接 DE 并延长至点 F，使得 $EF=DE$．连接 AF，CF，AD．



（1）求证：四边形 $ADCF$ 是菱形；

（2）连接 BF．若$\angle ACB=60^\circ$，$AF=2$，求 BF 的长．

9、（2024 北京顺义八下期末）在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 AD 上，$CE=DF$，连接 BE，CF．



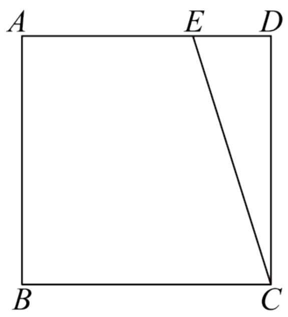
（1）求证：$BE\perp CF$；

（2）在边 AB 取点 M，使得 $AM=AF$，过点 M 作 $MN\parallel BE$ 交 CF 于点 N，连接 AN．

①依题意补全图形；

②用等式表示线段 AN，FN，MN 之间的数量关系，并证明．

10、（2024 北京门头沟八下期末）如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 AD 上的一点（不与 A，D 重合），连接 CE，点 B 关于直线 CE 的对称点是点 F，连接 CF，DF，直线 CE 与直线 DF 交于点 P，连接 BF 与直线 CE 交于点 Q.

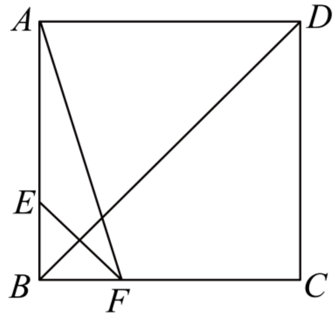


（1）依题意补全图形；

（2）求 $\angle CPF$ 的度数；

（3）用等式表示线段 PC，PD，PF 之间的数量关系，并证明.

11、（2024 北京昌平八下期末）如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 和 F 分别在 AB 和 BC 上，且关于 BD 对称，连接 AF，EF，过点 F 作 $FG \perp AF$，点 G 在 AF 的右侧，且 $FG = AF$，连接 AG 交 BD 于 H，连接 CG.



（1）请依题意补全图形，求证：$EF = CG$；

（2）猜想 AH，GH 的数量关系并证明.

12、（2024 北京海淀八下期末）如图 1，AC 和 BD 是▱$ABCD$ 的对角线，$AB=BD$. 点 E 为射线 BD 上的一点，连接 AE.

（1）当点 E 在线段 BD 的延长线上，且 $DE=BD$ 时，

①依题意补全图 1；

②求证：$AE=AC$；

（2）如图 2，当点 E 在线段 BD 上，且 $\angle AEB=2\angle ACD$ 时，用等式表示线段 AE，BE 和 AB 的数量关系，并证明.

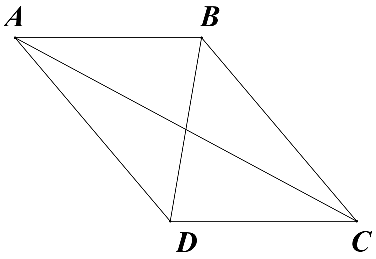


图 1

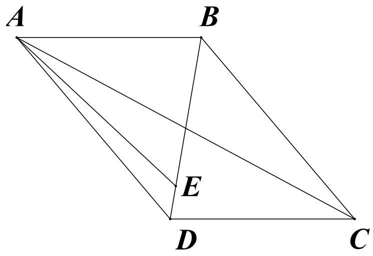
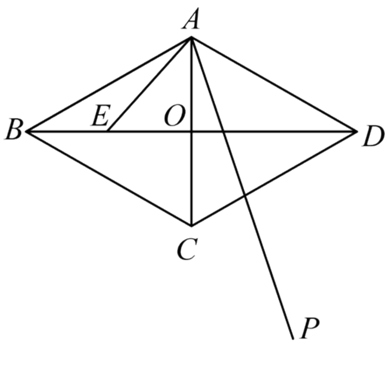


图 2

13、（2024 北京怀柔八下期末）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=2\alpha\left(45°<\alpha<90°\right)$，对角线 AC，BD 相交于点 O，E 是 OB 的中点，连接 AE．过点 A 作射线 AP，使得 $\angle EAP=\alpha$，过点 E 作 $EF\perp AE$ 交射线 AP 于点 F.

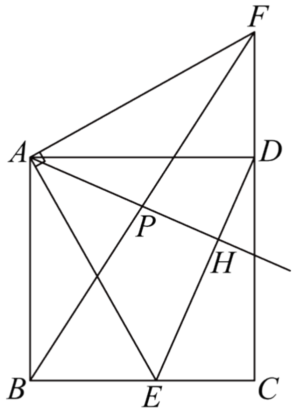


（1）①依题意补全图形；

②求证：$\angle EAC=\angle DAF$；

（2）连接 OF，DF，用等式表示线段 OF，DF 之间的数量关系，并证明.

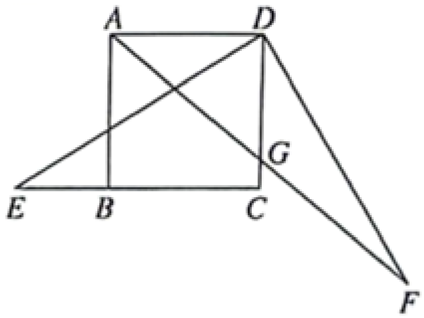
14、（2024 北京丰台八下期末）如图，E 是正方形 $ABCD$ 边 BC 上一动点（不与点 B，C 重合），连接 AE，过点 A 作 AE 的垂线交 CD 的延长线于点 F.



（1）求证：$AE=AF$；

（2）连接 BF、DE，取 BF 中点 P，连接 AP 并延长，交 DE 于点 H，依题意补全图形，直接写出 $\angle AHE$ 的大小，并证明.

15、（2024 北京通州八下期末）如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 CB 延长线上一点，连接 DE，过点 D 作 $DF\perp DE$ 且 $DF=DE$，连接 AF 交边 DC 于点 G.



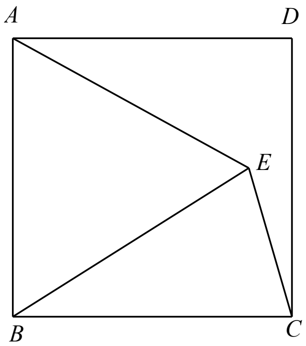
（1）求证：$\angle E=\angle GDF$；

（2）用等式表示线段 DG 与 EC 之间的数量关系，并证明.

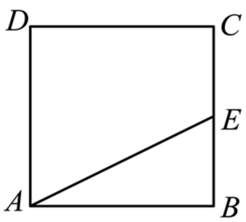
16、（2024 北京延庆八下期末）如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 内部一点，$BE=BA$，连接 AE，CE，过点 C 作 $CF\perp AE$ 交 AE 的延长线于点 F.

（1）依题意补全图形，求$\angle CEF$ 的度数；

（2）连接 DF，用等式表示线段 AF，DF，CF 之间的数量关系，并证明.



17、（2024 北京房山八下期末）如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 边上（与点 B，C 不重合），连接 AE 过点 E 作 AE 的垂线，交 DC 于点 M，延长 EM 到点 F，使 $EF=AE$，连接 FC.



（1）依题意补全图形；

（2）用等式表示线段 BE 与 CF 的数量关系，并证明.

18、（2024 北京燕山八下期末）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$CA=CB$，$\angle C=90°$，点 D 在直线 CA 上 (点 D 与点 A、点 C 不重合)，连接 BD，过点 D 作 DB 的垂线交直线 AB 于点 E，过点 A 作 AB 的垂线交直线 DE 于点 F.

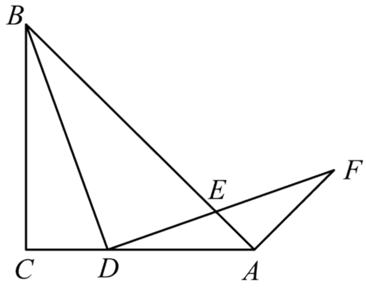


图1

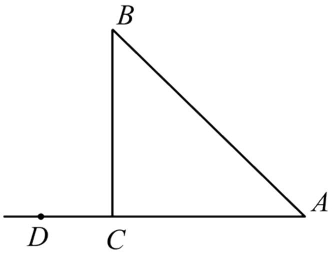


图2

（1）如图 1, 当点 D 在线段 CA 上时,

①求证: $\angle ABD=\angle AFD$；

②用等式表示线段 AB，AD，AF 之间的数量关系并证明.

（2）如图 2，当点 D 在射线 AC 上时，依题意补全图形，并直接用等式表示线段 AB，AD，AF 之间的数量关系.

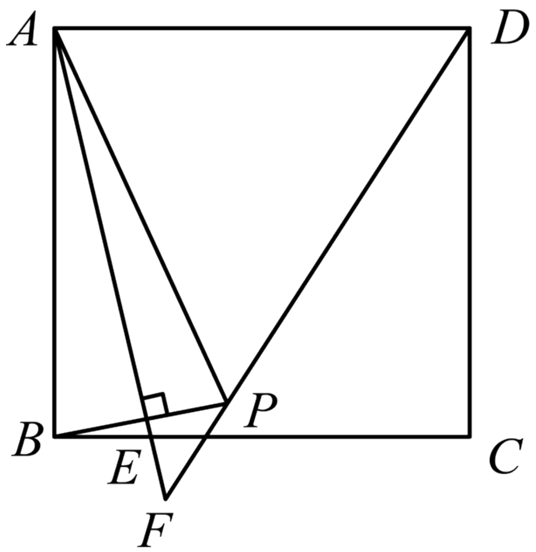
参考答案

1、【答案】（1）补全图形见解析，①$\angle ADP=45^\circ+\alpha$；②$\sqrt{2}AF=2PF+PD$，证明见解析

（2）$\sqrt{5}$

【解析】

（1）解：补全图形如下：



①$\because$点 P 与点 B 关于直线 AE 对称

$\therefore AE$ 垂直平分 BP，$AB=AP$，且 $\angle PAE=\angle BAE=\alpha$，

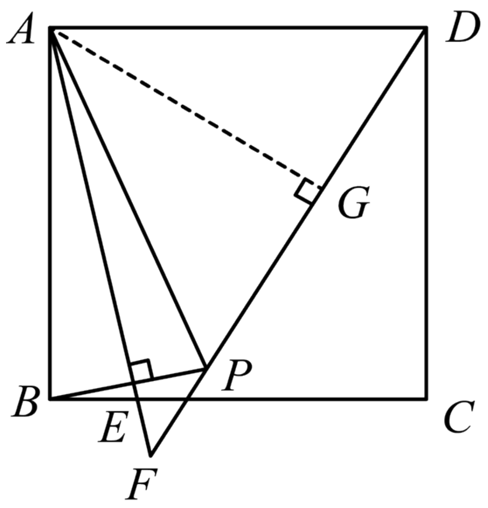
$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD$，$\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore AP=AD$，$\angle PAD=\angle BAD-\angle BAE-\angle PAE=90^\circ-2\alpha$，

$\therefore \angle ADP=\angle APD=\left(180^\circ-\angle PAD\right)\div 2=45^\circ+\alpha.$

②过点 A 作 $AG\perp DF$ 于点 G，如下图：则 $\angle AGF=90^\circ$



$\because AP=AD$，

$\therefore PG=\frac{1}{2}PD$，

$\because \angle APD=\angle F+\angle PAF$，

由①可知，$\angle APD=45^\circ+\alpha$，$\angle PAF=\alpha$，

$\therefore \angle F=45^\circ$

$\therefore \angle GAF=\angle F=45^\circ$，

$\therefore AG=FG$

在$Rt\triangle AGF$中，$AF=\sqrt{AG^2+FG^2}=\sqrt{2}FG$，

$\therefore AF=\sqrt{2}\left(PF+PG\right)=\sqrt{2}(PF+\frac{1}{2}PD)$，

即$\sqrt{2}AF=2PF+PD$．

（2）由对称性得$AE\perp BP$，$BF=PF$，$BE=PE$，

$\because PC/\!/AE$，

$\therefore BP\perp PC$，

$\because BE=PE$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

$\because \angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3=90^\circ$，

$\therefore \angle 4=\angle 3$，

则$BE=EP=EC$，

$\therefore E$为BC的中点，

$\because BC=AB=2$，

$\therefore BE=1$，

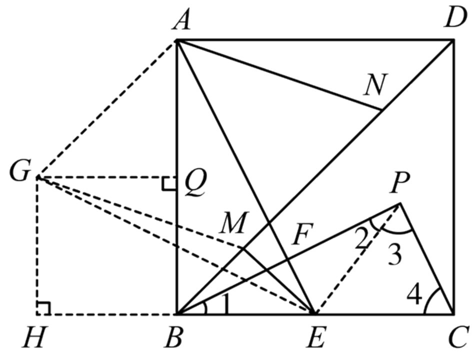
过点 A 作 $AG\parallel MN$，且 $AG=MN$，

则四边形 $AGMN$ 为平行四边形，

$\therefore AG=MN$，$AN=GM$，

$\therefore EM+AN$ 的最小值就等于 $EM+GM$，

$\therefore$当点 G，M，E 三点共线时，$EM+GM$ 取最小值，



$\because BN=BM+\sqrt{2}$，

$\therefore AG=MN=\sqrt{2}$，

过点 G 作 $GQ\perp AB$ 交 AB 于点 Q，作 $GH\perp CB$ 交 CB 延长线于点 H，

则四边形 $GQBH$ 为矩形，

$\therefore GH=QB$，$GQ=HB$，

$\because \angle ABD=45°$，$AG\parallel MN$，

$\therefore AQ=GQ=1$，

$\because AB=2$，

$\therefore GH=QB=1$，$HB=GQ=1$，

$\therefore GE=\sqrt{GH^2+HE^2}=\sqrt{5}$，

则 $EM+AN$ 的最小值为 $\sqrt{5}$．

2、【答案】（1）12 尺　　（2）见解析

【解析】

（1）解：设水池深度为 x 尺，则芦苇高度为 $OC=OD+CD=(x+1)$ 尺，

由题意有：$OE=OC=(x+1)$ 尺；

Q O 为 AB 中点，且 $AB=1$ 丈 $=10$ 尺，

$\therefore OA=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 10=5$ (尺)；

在 $\mathrm{Rt}\triangle EAO$ 中，由勾股定理得：$AE^2+OA^2=OE^2$，

即 $x^2+5^2=(x+1)^2$，

解得：$x=12$；

即 $OD=12$ 尺；

答：水池的深度 OD 为 12 尺；

（2）证明：水池深度 $OD=b$，则芦苇高度为 $OC=OD+CD=b+n$，

由题意有：$OE=OC=b+n$；

Q O 为 AB 中点，且 $AB=2a$，

$\therefore OA=\frac{1}{2}AB=a$；

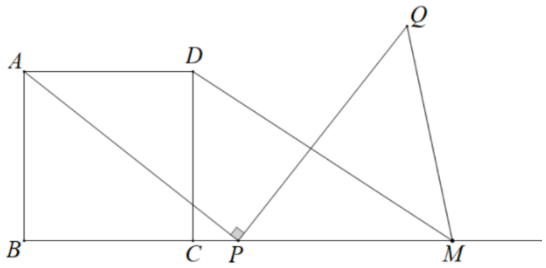
在 $\mathrm{Rt}\triangle EAO$ 中，由勾股定理得：$AE^2+OA^2=OE^2$，

即 $b^2+a^2=(b+n)^2$，

整理得：$b=\frac{a^2-n^2}{2n}$；

表明刘徽解法是正确的.

3、【答案】（1）补全图形



(2) 猜想：MD=$\sqrt{2}$ MQ

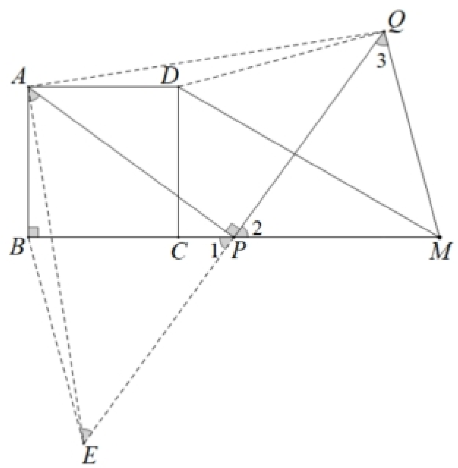
证明：连接 DQ,AQ,延长 QP 到点 E，使得 PE=PQ，连接 AE、BE

∵P 为 BM 中点，

∴PB=PM.

又∵∠1=∠2 ，　　PE=PQ,

∴△PBE≌△PMQ.



∴BE=MQ　∠BEP=∠3.

∵PQ⊥AP，且 PQ=AP,

∴∠PQA=∠PAQ=45°．

∵PQ⊥AP ，　PE=PQ,

∴AP 是 QE 的垂直平分线.

∴AE=AQ.

∴∠AEQ=∠PQA=45°．

∴∠EAQ=90°．

∵四边形 ABCD 是正方形.

∴AB=AD.　　∠BAD=90°．

∴∠BAD-∠EAD=∠EAQ-∠EAD

即∠BAE=∠DAQ.

∴△ABE≌△ADQ

∴BE=DQ.　　∠AEB=∠AQD.

∴DQ=MQ .

设∠AEB=∠AQD $=\alpha$，则∠DQP=45° $-\alpha$，∠BEP=45° $+\alpha$

∵∠3=∠BEP,

∴∠3=45° $+\alpha$.

∴∠DQM=∠DQP+∠3=90° .

∵在 Rt△QDM 中 $MD^2=DQ^2+MQ^2=2MQ^2$

∴MD= $\sqrt{2}$MQ

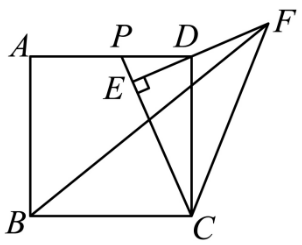
(3)CQ=7

4、【答案】（1）见解析　　（2）45°

（3）$BF^2=4EF^2+DF^2$，理由见解析.

【解析】

（1）解：如图所示，



（2）解：∵$DE\perp CP$，

∴$\angle EFC+\angle ECF=90°$，

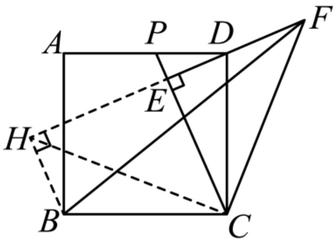
∵$EF=EC$，

∴$\angle EFC=\angle ECF=\dfrac{90°}{2}=45°$，

故答案为：45°；

（3）解：$BF^2=4EF^2+DF^2$，理由如下：

过点C作$CH\perp EF$，交FE的延长线于点H，连接BH，



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$CH \perp EF$，

∴ $\angle BCD = \angle HCF = 90°$，$BC = CD$，

∴ $BCH = \angle DCH$，

∵ $\angle ECF = \angle EFC = 45°$，$\angle HCF = 90°$，

∴ $\angle HCE = \angle FCE = 45°$，

∵ $HE \perp CE$，

∴ $\angle EHC = 90° - 45° = 45° = \angle ECH$，

∴ $HE = CE = EF$，

∴ $HF = 2EF$，

∵ $CE \perp HF$，

∴ $CH = CF$，

∴ $\triangle CBH \cong \triangle CDF$（SAS）

∴ $BH = DF$，$\angle BHC = \angle DFC = 45°$，

∴ $\angle BHF = \angle BHC + \angle CHE = 90°$，

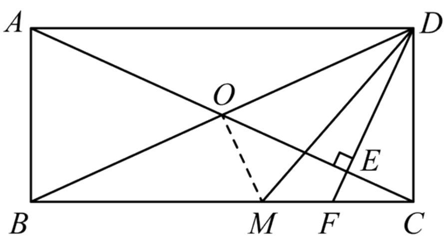
∴ $BF^2 = BH^2 + HF^2 = 4EF^2 + DF^2$．

5、27. 【答案】（1）①作图见解析，证明见解析；②证明见解析

（2）补全图形见解析，$DA = CM + FM$，证明见解析

【解析】

（1）解：①补全图形如下：



证明：$\because DE \perp AC$，

$\therefore \angle EDC + \angle DCE = 90^\circ$.

$\because$矩形 $ABCD$

$\therefore \angle DAC + \angle DCE = 90^\circ$.

$\therefore \angle DAC = \angle EDC$；

②如图：连接 OM，

$\because$矩形 $ABCD$

$\therefore AO = OD = OB = OD$， $AD \parallel BC$，

$\therefore \angle OAD = \angle ODA$， $\angle OBC = \angle ODA$

$\therefore \angle OAD = \angle OBC$，

$\because \angle DMC = 2\angle DAO$，

$\therefore \angle DMC = 2\angle OBC$，

$\because \angle DMC = \angle OBC + \angle ODM$，

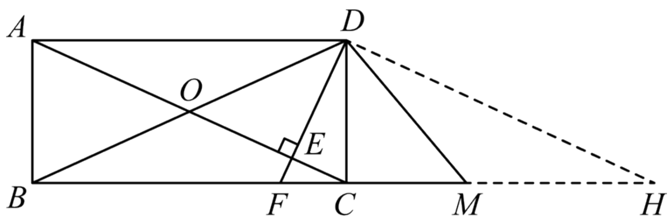
$\therefore \angle OBC = \angle ODM$，

$\therefore BM = MD$，

$\because O$ 为 BD 中点

$\therefore MO \perp BD$.

（2）解：当 M 在 BC 延长线上时，根据题意补全图形如下：



数量关系 $AD = CM + FM$，证明如下：

证明：如图：过点 D 作 $DH \parallel AC$ 交 BM 的延长线于点 N，

$\because$矩形 $ABCD$，

$\therefore AD \parallel CH$

又$\because DH \parallel AC$，

$\therefore$四边形 $ACHD$ 为平行四边形

$\therefore AD = CH, \angle DAC = \angle H$，

$\because \angle DMC = 2\angle DAO$，

$\therefore \angle DMC = 2\angle H$，

$\because \angle DMC = \angle H + \angle MDH$，

$\therefore \angle H = \angle MDH$，

$\therefore DM = MH$，

$\because DE \perp AC$，

$\therefore \angle DEC = 90°$.

$\because DH \parallel AC$，

$\therefore \angle EDH = 90°$，

$\because \angle H + \angle DFC = 90°$，$\angle MDH + \angle MDF = 90°$，

$\therefore \angle DFC = \angle FDM$，

$\therefore DM = FM$，

$\therefore FM = MH$，

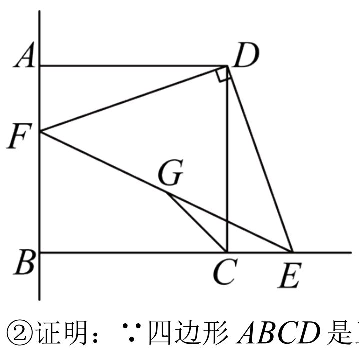
$\therefore AD = CM + FM$.

6、【答案】（1）①见解析；②见解析；③$CG = \frac{\sqrt{2}}{2}(CD - CE)$，理由见解析；

（2）$CG = \frac{\sqrt{2}}{2}(CE - CD)$，理由见解析.

【解析】

（1）解：①如图即为所求，



②证明：∵四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AD = CD = AB = BC$，$\angle ADC = \angle BCD = \angle BAD = \angle ABC = 90°$，

$\therefore \angle DCE = 180° - 90° = 90° = \angle DAF$，

$\because DF \perp DE$，

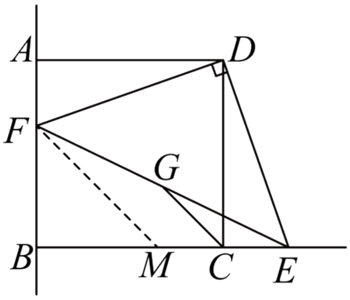
$\therefore \angle FDE = \angle ADC = 90°$，即$\angle ADF + \angle FDC = \angle FDC + \angle CDE = 90°$，

$\therefore \angle ADF = \angle CDE$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDE\left(\mathrm{ASA}\right)$；

③$CG = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(CD - CE\right)$，理由如下：

在BC上取一点M，使得$CM = CE$，连接FM，



$\because \triangle ADF \cong \triangle CDE\left(\mathrm{ASA}\right)$，

$\therefore AF = CE$；

$\because CE = CM$，点G是EF的中点，

$\therefore CG$是$\triangle EFM$的中位线，

$\therefore CG = \dfrac{1}{2}FM$，

由②得$AB = BC$，$CE = AF$，$\angle ABC = 90°$，

$\therefore AF + BF = BM + CM$，$CM = CE = AF$，

$\therefore BF = BM$，

$\because \angle ABC = 90°$，

$\therefore FM = \sqrt{BF^2 + BM^2} = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}\left(AB - AF\right) = \sqrt{2}\left(CD - CE\right)$，

$\therefore CG = \dfrac{1}{2}FM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(CD - CE\right)$；

（2）解：$CG = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(CE - CD\right)$，理由如下：

在CB延长线上取一点M，使得$CM = CE$，连接FM，