

9.3 分式方程





一艘轮船在静水中的最大航速为20千米/时，它沿江以最大航速顺流航行100千米所用时间，与以最大航速逆流航行60千米所用时间相等，江水的流速为多少？

解：设江水的流速为 x 千米/时.

$$\frac{100}{20+x} = \frac{60}{20-x}$$

$$\frac{100}{20+x} = \frac{60}{20-x}$$

此方程的分母中含未知数 x ，像这样分母中含未知数的方程叫做分式方程。

以前学过的分母里不含有未知数的方程叫做整式方程。

分式方程的特征是什么？

下列方程中，哪些是**分式方程**？哪些是**整式方程**？

$$\frac{x-2}{2} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x}$$

$$\frac{3-x}{\pi} = \frac{x}{2}$$

$$x - \frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 7$$

$$\frac{x(x-1)}{x} = -1$$

$$2x + \frac{x-1}{5} = 10$$

$$\frac{2x+1}{x} + 3x = 1$$



如何解分式方程？

$$\frac{100}{20+x} = \frac{60}{20-x}$$

我们已经熟悉一元一次方程等**整式方程**的解法，若把**分式方程**转化为**整式方程**就能解了。能否将分式方程化为整式方程呢？分式方程的分母中含有未知数，因此解分式方程最关键的问题在于**“去分母”**。

$$\frac{100}{20+x} = \frac{60}{20-x}$$

x=5是原分式方程的解吗?

方程中各分母的最简公分母是:

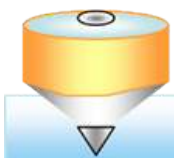
$$(20+x)(20-x)$$

解:方程两边同乘 $(20+x)(20-x)$, 得

$$100(20-x) = 60(20+x)$$

$$\text{解得 } x = 5$$

检验:将 $x=5$ 代入原方程中, 左边=4=右边, 因此 $x=5$ 是原分式方程的解.



归纳

解分式方程的基本思路是将**分式方程**化为**整式方程**，具体做法是“**去分母**”，即方程两边同乘**最简公分母**。这也是解分式方程的一般思路和做法。

这种数学思想方法把它叫做“**转化**”数学思想。



探究

解分式方程： $\frac{1}{x-5} = \frac{10}{x^2-25}$ $x=5$ 是原分式方程的解吗？

解：方程两边同乘 $(x+5)(x-5)$ ，得

解得 $x = 5$ $x + 5 = 10$

检验：将 $x=5$ 代入原方程中，分母 $x-5$ 和 x^2-25 的值都为0，相应的分式无意义。因此 $x=5$ 虽是整式方程 $x+5=10$ 的解，但不是原分式方程 $\frac{1}{x-5} = \frac{10}{x^2-25}$ 的解，实际上，这个分式方程无解，称为增根。



上面两个分式方程中，为什么

$\frac{100}{20+x} = \frac{60}{20-x}$ 去分母后所得整式方程的解就是原分式方程的解，而

$\frac{1}{x-5} = \frac{10}{x^2-25}$ 去分母后所得整式方程的解却不是原分式方程的解呢？

思考

我们来观察去分母的过程

$$\frac{100}{20+x} = \frac{60}{20-x} \xrightarrow{\text{两边同乘}(20+x)(20-x)} 100(20-x) = 60(20+x)$$

当 $x=5$ 时, $(20+x)(20-x) \neq 0$

分式两边同乘了不为0的式子,所得整式方程的解与分式方程的解相同.

$$\frac{1}{x-5} = \frac{10}{x^2-25} \xrightarrow{\text{两边同乘}(x+5)(x-5)} x+5=10$$

当 $x=5$ 时, $(x+5)(x-5)=0$

分式两边同乘了等于0的式子,所得整式方程的解使分母为0,这个整式方程的解就不是原分式方程的解

【分式方程解的检验】

$$\frac{100}{20+x} = \frac{60}{20-x} \quad \begin{array}{l} \text{两边同乘 } (20+v)(20-v) \\ \text{当 } v=5 \text{ 时, } (20+v)(20-v) \neq 0 \end{array} \rightarrow 100(20-x) = 60(20+x)$$

分式两边同乘了不为0的式子,所得整式方程的解与分式方程的解相同.

$$\frac{1}{x-5} = \frac{10}{x^2-25} \quad \begin{array}{l} \text{两边同乘 } (x+5)(x-5) \\ \text{当 } x=5 \text{ 时, } (x+5)(x-5)=0 \end{array} \rightarrow x+5=10$$

分式两边同乘了等于0的式子,所得整式方程的解使分母为0,这个整式方程的解就不是原分式方程的解

解分式方程时,去分母后所得整式方程的解有可能使原方程的分母为0,所以分式方程的解必须检验.

 怎样检验这个整式方程的解是不是原分式方程的解?

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/636243141215010134>