

4.5.1 函数的零点与方程的解

【题型归纳目录】

题型一：求函数的零点

题型二：根据零点求函数解析式的参数

题型三：零点存在性定理的应用

题型四：根据零点所在区间求参数范围

题型五：根据零点的个数求参数范围

题型六：一次函数零点分布求参数范围

题型七：二次函数零点分布求参数范围

题型八：指对幂函数零点分布求参数范围

题型九：函数与方程的综合应用

【知识点梳理】

知识点一：函数的零点

1、函数的零点

(1) 一般地，如果函数 $y = f(x)$ 在实数 α 处的值等于零，即 $f(\alpha) = 0$ ，则 α 叫做这个函数的零点.

知识点诠释：

①函数的零点是一个实数，当函数的自变量取这个实数时，其函数值等于零；

②函数的零点也就是函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标；

③函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的实数根.

归纳：方程 $f(x) = 0$ 有实数根 \Leftrightarrow 函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 \Leftrightarrow 函数 $y = f(x)$ 有零点.

(2) 二次函数的零点

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的零点个数，方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的实根个数见下表.

判别式	方程的根	函数的零点
$\Delta > 0$	两个不相等的实根	两个零点
$\Delta = 0$	两个相等的实根	一个二重零点
$\Delta < 0$	无实根	无零点

(3) 二次函数零点的性质

①二次函数的图象是连续的，当它通过零点时（不是二重零点），函数值变号.

②相邻两个零点之间的所有的函数值保持同号.

引伸：对任意函数，只要它的图象是连续不间断的，上述性质同样成立.

2、函数零点的判定

(1) 利用函数零点存在性的判定定理

如果函数 $y = f(x)$ 在一个区间 $[a, b]$ 上的图象不间断，并且在它的两个端点处的函数值异号，即

$f(a)f(b) < 0$ ，则这个函数在这个区间上，至少有一个零点，即存在一点 $x_0 \in (a, b)$ ，使 $f(x_0) = 0$ ，这个 x_0 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根.

知识点诠释:

①满足上述条件，我们只能判定区间内有零点，但不能确定有几个. 若函数在区间内单调，则只有一个；若不单调，则个数不确定.

②若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有 $f(a) \cdot f(b) > 0$ ， $f(x)$ 在 (a, b) 内也可能有零点，例如 $f(x) = x^2$ 在 $[-1, 1]$ 上， $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 在区间 $[-2, 4]$ 上就是这样的. 故 $f(x)$ 在 (a, b) 内有零点，不一定有 $f(a) \cdot f(b) < 0$.

③若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象不是连续不断的曲线， $f(x)$ 在 (a, b) 内也可能是有零点，例如函数 $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ 在 $[-2, 2]$ 上就是这样的.

(2) 利用方程求解法

求函数的零点时，先考虑解方程 $f(x) = 0$ ，方程 $f(x) = 0$ 无实根则函数无零点，方程 $f(x) = 0$ 有实根则函数有零点.

(3) 利用数形结合法

函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = g(x)$ 的实数根，也就是函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = g(x)$ 的图象交点的横坐标.

【方法技巧与总结】

1、函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线， $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，且 $f(x)$ 具有单调性，则函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内只有一个零点.

2、函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线，函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点，且函数 $f(x)$ 具有单调性，则 $f(a) \cdot f(b) < 0$

3、零点个数的判断方法

(1) 直接法：直接求零点，令 $f(x) = 0$ ，如果能求出解，则有几个不同的解就有几个零点.

(2) 定理法：利用零点存在定理，函数的图象在区间 $[a, b]$ 上是连续不断的曲线，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点.

(3) 数形结合法：

①单个函数图象：利用图象交点的个数，画出函数 $f(x)$ 的图象，函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴交点的个数就是函数 $f(x)$ 的零点个数；

②两个函数图象：将函数 $f(x)$ 拆成两个函数 $h(x)$ 和 $g(x)$ 的差，根据 $f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = g(x)$ ，则函数 $f(x)$ 的零点个数就是函数 $y = h(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图象的交点个数.

4、判断函数零点所在区间

(1) 将区间端点代入函数求函数的值；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/638006000114006105>