专项训练三　二次函数的实际应用

类型一：图形面积问题

1．(2024·湖北)如图，某校劳动实践基地用总长为80 m的栅栏，围成一块一边靠墙的矩形实验田，墙长为42 m，栅栏在安装过程中不重叠、无损耗，设矩形实验田与墙垂直的一边长为x(单位：m)，与墙平行的一边长为y(单位：m)，面积为S(单位：m^2)．

(1)直接写出y与x，S与x之间的函数解析式(不要求写x的取值范围)；

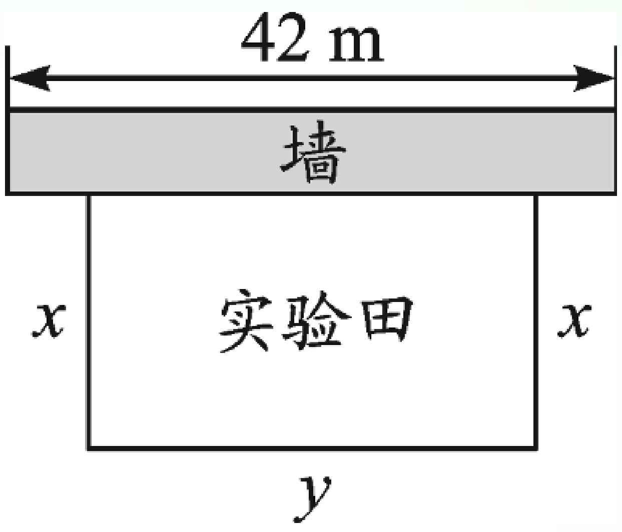
(2)矩形实验田的面积S能达到750 m^2吗？如果能，求x的值；如果不能，请说明理由；

(3)当x的值是多少时，矩形实验田的面积S最大？最大面积是多少？

解：(1)∵$2x+y=80$，∴$y=-2x+80$，

∵$S=xy$，

∴$S=x(-2x+80)=-2x^2+80x$.



(2)∵$y\le 42$，∴$0<-2x+80\le 42$，∴$19\le x<40$，

当$S=750$时，$-2x2+80x=750$，

$x^2-40x+375=0$，$(x-25)(x-15)=0$，

∴$x_1=25$，$x_2=15$(舍去)，

∴当$x=25$ m时，矩形实验田的面积S能达到750 m^2.

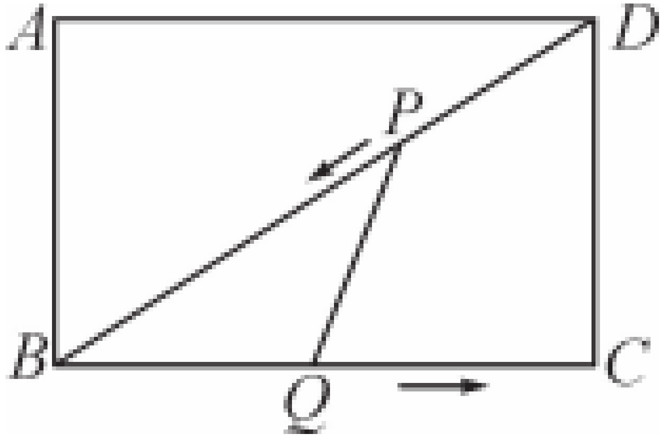
(3)∵$S=-2x^2+80x=-2(x-20)^2+800$，

∴当$x=20$ m时，S有最大值为800 m^2.

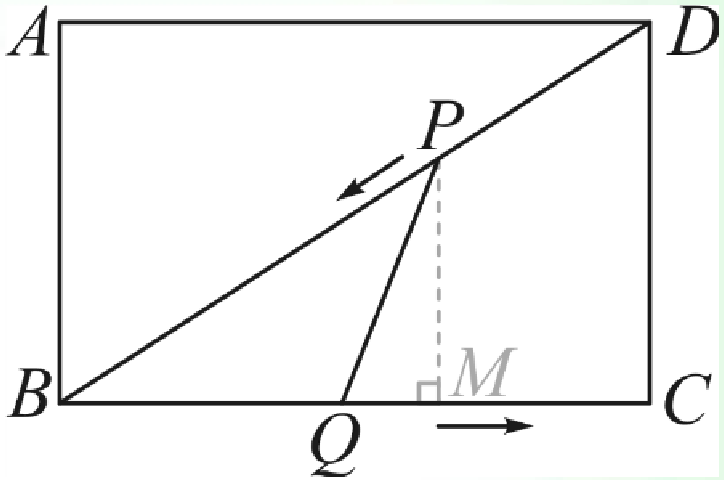
2．如图，在矩形ABCD中，AB＝3 cm，BC＝4 cm.设P，Q分别为BD，BC上的动点，点P自点D沿DB方向做匀速移动的同时，点Q自点B沿BC方向向点C做匀速移动，移动的速度均为1 cm/s，设P，Q移动的时间为$t(0\le t\le 4)$．

(1)当t为何值时，$PQ\perp BC$?

(2)写出△PBQ的面积S(cm2)与时间t(s)之间的函数解析式，当t为何值时，S有最大值？最大值是多少？



解：(1)由题意知，BD＝5，BQ＝t，QC＝4－t，DP＝t，BP＝5－t，



∵PQ⊥BC，∴△BPQ∽△BDC，

∴$\frac{BP}{BD}=\frac{BQ}{BC}$，即$\frac{5-t}{5}=\frac{t}{4}$，∴t＝$\frac{20}{9}$.

∴当t＝$\frac{20}{9}$时，PQ⊥BC.

(2)过点P作PM⊥BC，垂足为M，

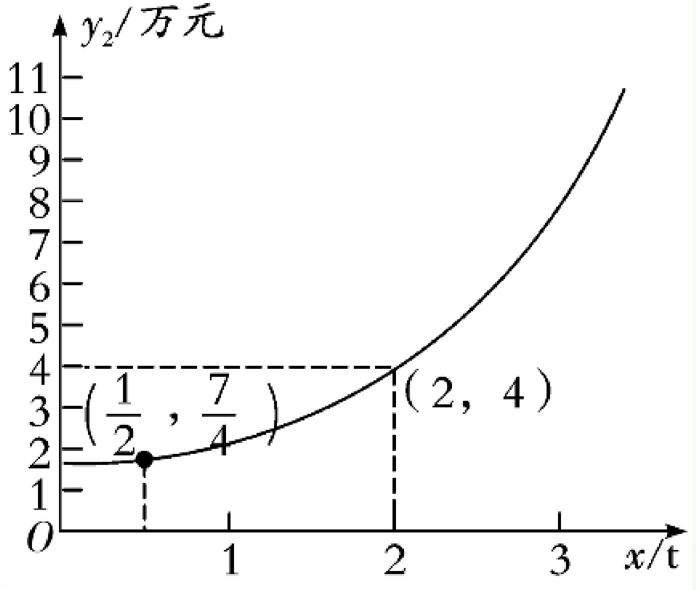
∴△BPM∽△BDC，∴$\frac{5-t}{5}=\frac{PM}{3}$，

∴PM＝$\frac{3}{5}$(5－t)，∴S＝$\frac{1}{2}$t×$\frac{3}{5}$(5－t)＝$-\frac{3}{10}\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{8}$，

∴当t＝$\frac{5}{2}$ s时，S有最大值为 $\frac{15}{8}$ cm^2.

类型二：最大利润问题

3.某公司销售一批产品,经市场调研发现,当销售量在0.4 t至3.5 t之间时,销售额y_1(单位：万元)与销售量x(单位：t)的函数解析式为$y_1=5x$；成本y_2(单位：万元)与销售量x(单位：t)的函数图象是如图所示的抛物线的一部分,其中$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$是其顶点.



(1)求出成本y_2关于销售量x的函数解析式;

(2)当成本最低时,销售产品所获利润是多少?

(3)当销售量是多少吨时,可获得最大利润?最大利润是多少?(注：利润＝销售额 - 成本)

解：(1)∵顶点为$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$,

设抛物线的解析式为$y2=a(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}$,

又∵抛物线过(2,4),∴$a\times\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=4$,

∴$a=1$,∴$y_2=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}(0.4\leq x\leq 3.5)$.

(2)当销售量$x=\frac{1}{2}$时,成本最低为$\frac{7}{4}$,

$\therefore$当$x=\frac{1}{2}$时,销售额为$y_1=5x=5\times\frac{1}{2}=2.5$.

$\therefore$此时利润为$2.5-\frac{7}{4}=0.75$(万元).

答：当成本最低时,销售产品所获利润是0.75万元.

(3)由题意,利润为

$$y_1 - y_2 = 5x - [(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}]$$

$$= -x^2 + 6x - 2$$

$$= -(x - 3)^2 + 7.$$

$\because -1 < 0$,$\therefore$当$x = 3$时,利润取最大值为7.

答：当销售量是3 t时,可获得最大利润,最大利润是7万元.