§8.1　假**设检验**的概念

△ 何**为**假**设检验**?

当**总**体分布函数完全未知或只知其形式、但不知其参数的情况，**为**推断**总**体的性**质**，提出某些关于**总**体的假**设**。

为判断所作的假**设**是否正确，从**总**体中抽取**样**本，根据**样**本的取**值**，按一定的原**则进**行**检验**，然后，作出接受或拒**绝**所作假**设**的决定.

△ 我们主要讨论的假设检验的内容有

- 参数检验
  - 总体均值、均值差的检验
  - 总体方差、方差比的检验
- 非参数检验： 分布拟合检验

△ 假设检验的理论依据

其理论背景为实际推断原理，即“小概率原理”，其想法和前面的最大似然类似：如果实际观测到的数据在某假设下不太可能出现，则认为该假设错误 。

例 1：某**产**品的出厂**检验规**定：次品率p 不超**过**4%才能出厂. **现**从一万件**产**品中任意抽**查**12件**发现**3件次品，**问该**批**产**品能否出厂？若抽**查结**果**发现**1件次品，**问**能否出厂？

解：先作一个假**设**。$H_0: p \le 0.04$

我**们**称H_0是原假**设**或零假**设**.

再作一个**备择**假**设**

$$H_1: p > 0.04$$

在H_0成立**时**

$p = 0.04$ 代入

$$P = C_{12}^{3} p^{3} (1-p)^{9} = 0.0097 < 0.01$$

这是小概率事件，　一般在一次**试验**中是不会**发**生的，　**现**一次**试验**竟然**发**生，　故可**认为**原假**设**不成立，　即**该**批**产**品次品率$p>0.04$ ，　**则该**批**产**品不能出厂.

若抽**查结**果**发现**1件次品，　**则**在H_0 成立**时**

$$P = C_{12}^{1} p^{1} (1-p)^{11} = 0.306 > 0.3$$

这不是小概率事件，　没理由拒**绝**原假**设**。在不准**备继续**抽**样**的情况下，　作出接受原假**设**的决定，　即**该**批**产**品可以出厂.

例2：一条新建的南北交通干线全长10公里. 公路穿过一个隧道(长度忽略不计), 隧道南面3. 5公里

，

北面6. 5公里. 在刚刚通车的一个月中，隧道南发生了3起交通事故，而隧道北没有发生交通事故, 能否认为隧道南的路面更容易发生交通事故?

分析：用p表示一起交通事故发生在隧道南的概率. 则p=0. 35表示隧道南北的路面发生交通事故的可能性相同. p>0. 35表示隧道南的路面发生交通事故的概率比隧道北的路面发生交通事故的概率大.

------为了作出正确的判断，先作一个假设

H_0:　$p=0.35$.

我们称H_0是原假设或零假设.

再作一个备择假设

H_1: $p> 0.35$.

在本问题中, 如果判定H_0不对, 就应当承认H_1.

检验: 三起交通事故的发生是相互独立的，他们之间没有联系.

如果H_0为真，则每一起事故发生在隧道南的概率都是0.35，于是这三起交通事故都发生在隧道南的概率是

$$P=0.35^3\approx 0.043.$$

这是一个很小的概率，一般不容易发生.

所以我们否定H_0，认为隧道南的路面发生交通事故的概率比隧道北大.

做出以上结论也有可能犯错误。这是因为当隧道南北的路面发生交通事故的概率相同，而3起交通事故又都出现在隧道南时，我们才犯错误。这一概率正是P=0.043.

于是，我们判断正确的概率是1-0.043=95.7%

假设检验中的基本概念和检验思想

(1) 根据问题的背景，提出原假设

(2) H_0: $p=0.35$,

及其备择假设

H_1: $p>0.35$.

(2) 在H_0成立的假设下，计算观测数据出现的概率P.

➢ 如果P很小(一般用0.05衡量)，就应当否定H_0，承认H_1;

➢如果P不是很小，也不必急于承认H_0，这是因为证据往往还不够充分.

如果继续得到的观测数据还不能使得P降低下来，再承认H_0不迟.

(3) 为了简便，我们把以上的原假设和备择假设记作

$$H_0: p=0.35 \quad \text{vs} \quad H_1: p>0.35.$$

其中的vs是versus的缩写.

例 3. 某厂生产的螺钉, 按标准强度为68克/mm^2，而实际生产的螺钉强度 X 服从 $N(\mu, 3.6^2)$. $E(X) = \mu = 68$, 则认为这批螺钉符合要求, 否则认为不符合要求. 为此提出如下原假设

$$H_0: \mu = 68$$

和备择假设

$$H_1: \mu \neq 68$$

现从该厂生产的螺钉中抽取容量为 36 的样本， 其样本均值为

$$\bar{x} = 68.5$$

问原假设是否正确?

解： 构造**检验统计量**

若原假**设**H_0正确， **则** $\overline{X} \sim N(68, \frac{3.6^2}{36})$

又因**为** $\overline{X}$是 μ 的无偏估**计**。**则**它偏离68不**应该**太**远**， 偏离**较远**是小概率事件。

由于 $$\frac{\overline{X}-68}{\frac{3.6}{6}} \sim N(0,1)$$

故 $\left|\frac{\overline{X}-68}{\frac{3.6}{6}}\right|$ 取**较**大**值**也是小概率事件。

规定✔为小概率事件的概率大小，也是显著水平。

通常取 ✔ = 0. 05，0. 01，…

如✔ = 0. 05。确定一个常数c， 使得

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-68}{\frac{3.6}{6}}\right|>c\right)=\alpha$$

则 $$c=z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$$

由 $$\left|\frac{\bar{X}-68}{\frac{3.6}{6}}\right|>1.96 \Longrightarrow \bar{X}>69.18 \text{ 或 } \bar{X}<66.824$$

于是**检验**的拒**绝**域**为**

$$W=\{\bar{X}>69.18 \text{ or } \bar{X}<66.824\}$$

现根据**样**本**观测值**，

$$\bar{x}=68.5$$

现 $\bar{x}=68.5$ 未落入拒**绝**域,**则**接受原假**设**H_0: μ = 68

参数检验的一般提法

一般来讲，设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体X的样本，θ 是总体X的未知参数，但是已知 $\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1$，它们是互不相交的参数集合.

对于假设

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \in \Theta_1$$

根据样本，构造一个检验统计量T 和检验法则：若与T的取值有关的一个小概率事件W发生，则否定H_0，否则接受H_0，而且要求

$$P(W \mid H_0) \le \alpha$$

此时称W为拒绝域，α 为检验水平。

$$P(W \mid H_0) \le \alpha, \qquad T \in W$$ --------否定H_0

解决假**设检验**的**问题时**，无**论**作出否定**还**是接受原假**设**H_0的决定，都有可能犯**错误**．我**们**称否定H_0**时**犯的**错误为**第一**类错误**，接受H_0 **时**犯的**错误为**第二**类错误**．具体如下，

（1）H_0 为真，**统计**推断的**结**果否定H_0，犯第一类**错误**，犯**该错误**的概率不超**过**✓。

（2）H_0 为假，**统计**推断的**结**果接受H_0，犯第二类**错误**，我**们记**犯**该错误**的概率**为**✓。

假设检验的两类错误

真实情况 \ 所作判断	接受H_0	拒绝H_0
H_0 为真	正确	第一类错误（弃真）
H_0 为假	第二类错误（取伪）	正确

犯第一类错误的概率通常记为

犯第二类错误的概率通常记为

如在例1中，如果第一起交通事故**发**生后，就断定隧道南更容易**发**生交通事故，犯第一**类错误**的概率是0.35. 当第二起交通事故**发**生后，断定隧道南更容易**发**生交通事故，犯第一**类错误**的概率是$0.35^2=0.1225$. 如果第四起交通事故又**发**生在隧道南，否定$p=0.35$**时**犯第一**类错误**的概率是$0.35^4=0.015$.

在例3 中

$$P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真})$$

$$= P(\bar{X} < 66.824 \cup \bar{X} > 69.18)$$

$$= \alpha = 0.05$$

希望所用的**检验**方法尽量少犯**错误**, 但不能完全排除犯**错误**的可能性. 理想的**检验**方法**应**使犯两**类错误**的概率都很小, 但在**样**本的容量**给**定的情形下， 不可能使两者都很小, 降低一个， 往往使另一个增大.

假**设检验**的指**导**思想是控制犯第一**类错误**的概率不超**过** ✔ , 然后, 若有必要, 通**过**增大**样**本容量的方法来减少 ✔ .

注 1° 一般, 作假设检验时, 先控制犯第一类错误的概率 ✓, 在保证 ✓ 的条件下使 ✓ 尽量地小. 要降低 ✓ 一般要增大样本容量. 当H_0不真时, 参数值越接近真值, ✓ 越大.

注 2° 备择假设可以是单侧, 也可以是双侧的. 例3中的备择假设是双侧的. 如果根据以往的生产情况, $◡_0$ =68. 现采用了新工艺, 关心的是新工艺能否提高螺钉强度, ◡越大越好. 此时, 可作如下的假设检验:

原假设H_0: ◡ = 68; 备择假设H_1 : ◡ > 68

当原假设H_0: $\mu = \mu_0 = 68$ 为真时,

$\bar{X} - \mu_0$ 取较大值的概率较小

当备择假设H_1: $\mu > 68$ 为真时,

$\bar{X} - \mu_0$ 取较大值的概率较大

给定显著性水平 α ，根据$P\left(\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > C\right) = \alpha$

可确定拒绝域

$$\bar{X} \in \left(\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad +\infty\right)$$

称这种检验为单边检验.

另外, 可设

原假设 $H_0: \mu \le 68$

备择假设 $H_1: \mu > 68$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), E(\bar{X}) = \mu$$

若原假设正确, 要求

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > C\right) = \alpha$$

但现不知 μ 的真值，只知 $\mu \le \mu_0 = 68$。由于

$$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > C\right\} \subset \left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > C\right\}$$

$$\longrightarrow \quad P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > C\right) \le P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > C\right)$$

且

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

所以，只要取$C = z_\alpha$，可得$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right) = \alpha$