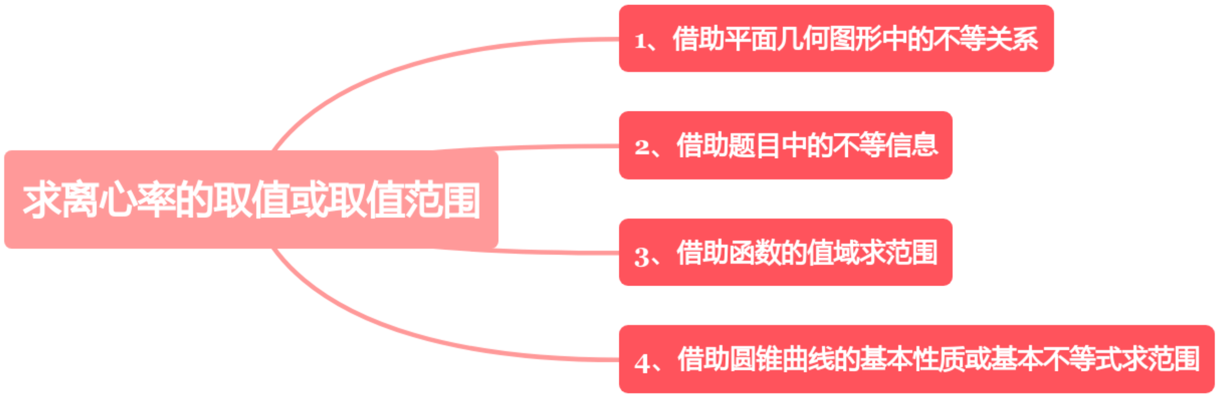
专题 03 求圆锥曲线的离心率或离心率的取值范围

网络构建



夯基·必备基础知识梳理

1、椭圆中的最值问题：

2、.在求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 离心率范围时常用的不等关系：$|x|\le a,|y|\le b$，$a-c\le|FP|\le a+c$，$b\le|OP|\le a$（P 为椭圆上一点）

3、焦点三角形：

4、点差法：

5、通径以及通径的推广：

提升·必考题型归纳

(一) 借助平面几何图形中的不等关系

根据平面图形的关系,如三角形两边之和大于第三边、折线段大于或等于直线段、对称的性质中的最值等得到不等关系,然后将这些量结合曲线的几何性质用 a,b,c 进行表示,进而得到不等式,从而确定离心率的范围.

【例 1】、(1)已知两定点 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$,动点 $P(x,y)$ 在直线 $l: y=x+3$ 上移动,椭圆 C 以 A,B 为焦点且经过点 P,则椭圆 C 的离心率的最大值为(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

【答案】A

【解析】$A(-1,0)$ 关于直线 $l: y=x+3$ 的对称点为 $A'(-3,2)$,连接 $A'B$ 交直线 l 于点 P,则椭圆 C 的长轴长的最小值为 $|A'B|=2\sqrt{5}$,所以椭圆 C 的离心率的最大值为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,故选 A.

【点评】求解本题的关键是利用对称性求距离的最小值

(2).(**2021·江苏省如皋中学**)焦点在 x 轴上的椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,短轴的一个端点和两个焦点相连构成一个三角形,该三角形内切圆的半径为 $\dfrac{b}{3}$,则椭圆的离心率为__________.

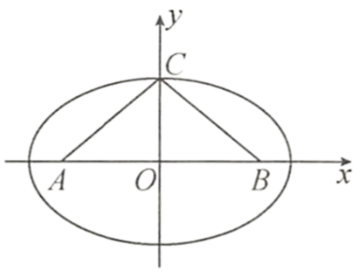
【答案】$\dfrac{1}{2}$

【分析】

根据三角形 ABC 的面积建立有关 a,b,c 的关系,得到 $a=2c$,即可求出离心率.

【详解】

由题意,如图:



由椭圆的性质可知,$AB=2c$,$AC=BC=a$,$OC=b$,$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot OC=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=bc$,所以

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+a+2c)\times\frac{b}{3}=\frac{b(a+c)}{3},\therefore\frac{b(a+c)}{3}=bc,a=2c$，故椭圆离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

（3）.（**2023上·江苏常州·高二校联考期中**）**(多选题)**已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在椭圆上，$\triangle PF_1F_2$的面积为6，则（　）

A．点P的横坐标为$\frac{5\sqrt{3}}{2}$

B．$\triangle PF_1F_2$的周长为16

C．$\triangle PF_1F_2$的内切圆的半径为$\frac{3}{4}$

D．$\triangle PF_1F_2$的外接圆的半径为$\frac{73}{16}$

【答案】BCD

【分析】根据椭圆的标准方程，椭圆的定义式，三角形的周长，以及三角形的周长与三角形的内切圆半径的关系，正余弦定理，即可依次得出答案.

【详解】由题意知$a=5$，$b=4$，$c=3$，则$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，$|F_1F_2|=2c=6$.

对于A选项，因为$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times6\times|y_p|=6$，解得$|y_p|=2$，又$\frac{x_p^2}{25}+\frac{y_p^2}{16}=1$，

则$x_p^2=25\left(1-\frac{2^2}{16}\right)=\frac{75}{4}$，$x_p=\pm\frac{5\sqrt{3}}{2}$，故A错误；

对于B选项，$\triangle PF_1F_2$的周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=10+6=16$，故B正确；

对于C选项，设$\triangle PF_1F_2$的内切圆的半径r，

则$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\times r$，

又$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=16$，$S_{\triangle PF_1F_2}=6$，

解得$r=\frac{3}{4}$，故C正确；

对于D选项，在$\triangle PF_1F_2$中，

由$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=6$，

解得$|PF_1||PF_2|=\frac{12}{\sin\angle F_1PF_2}$，

又$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，

即$4c^2=4a^2-2\times\frac{12}{\sin\angle F_1PF_2}-2\times\frac{12\cos\angle F_1PF_2}{\sin\angle F_1PF_2}$，

整理得：$\frac{24+24\cos\angle F_1PF_2}{\sin\angle F_1PF_2}=4a^2-4c^2$，

即$\dfrac{24+24\cos\angle F_1PF_2}{\sin\angle F_1PF_2}=64$，

即$3+3\cos\angle F_1PF_2=8\sin\angle F_1PF_2$，

又$\sin^2\angle F_1PF_2+\cos^2\angle F_1PF_2=1$，

解得$\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{48}{73}$，

设$\triangle PF_1F_2$的外接圆的半径为R，

由正弦定理知：$\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=2R$，即$\dfrac{6}{\frac{48}{73}}=2R$，解得$R=\dfrac{73}{16}$，故D正确.

故选：BCD.

【小试牛刀】（1）.（2021·全国高二课时练习）已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$与圆$C_2:x^2+y^2=b^2$，若在椭圆$C_1$上存在点$P$，使得过点$P$所作的圆$C_2$的两条切线互相垂直，则椭圆$C_1$的离心率的取值范围是（　　）

A. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　　B. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　C. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　D. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

【答案】C

【分析】

若长轴端点P'，由椭圆性质：过P的两条切线互相垂直可得$\alpha=\angle AP'O\le 45^\circ$，结合$\sin\alpha=\dfrac{b}{a}$求椭圆离心率的范围.

【详解】

在椭圆C_1的长轴端点P'处向圆C_2引两条切线$P'A$，$P'B$，

若椭圆C_1上存在点P，使过P的两条切线互相垂直，则只需$\angle AP'B\le 90^\circ$，即$\alpha=\angle AP'O\le 45^\circ$，

$\therefore\sin\alpha=\dfrac{b}{a}\le\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得$a^2\le 2c^2$，$\therefore e^2\ge\dfrac{1}{2}$，又$0<e<1$，

$\therefore\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le e<1$，即$e\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$．故选：C

（2）.（2021·湖南永州·高三）已知椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，$F_1$、$F_2$为椭圆的左右焦点，$P$为椭圆上在第一象限的一点，$I$为$\triangle PF_1F_2$的内心，直线$PI$与$x$轴交于点$Q$，若$|PQ|=3|IQ|$，则该椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【分析】

连接IF_1、IF_2，I是$\triangle PF_1F_2$的内心，得到PQ为$\angle F_1PF_2$的角平分线，即Q到直线PF_1、PF_2的距离相等，利用三角形的面积比，得到$\frac{|PI|}{|IQ|}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|F_1Q|+|F_2Q|}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{a}{c}$，结合椭圆的离心率的定义，即可求解.

【详解】

如图所示，连接IF_1、IF_2，I是$\triangle PF_1F_2$的内心，

可得IF_1、IF_2分别是$\angle PF_1F_2$和$\angle PF_2F_1$的角平分线，

由于经过点P与$\triangle PF_1F_2$的内切圆圆心I的直线交x轴于点Q，

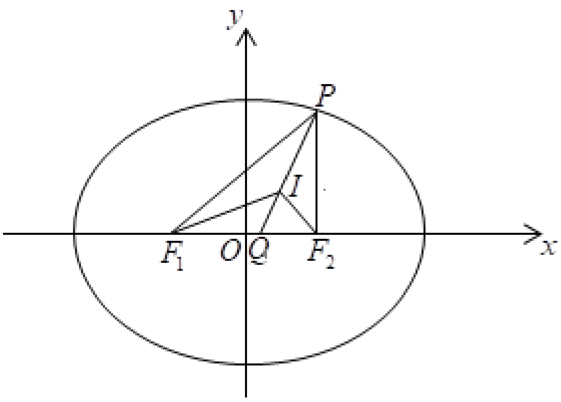
则PQ为$\angle F_1PF_2$的角平分线，则Q到直线PF_1、PF_2的距离相等，

所以$\frac{S_{\triangle PF_1Q}}{S_{\triangle PF_2Q}}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|QF_1|}{|QF_2|}$，同理可得$\frac{|PI|}{|IQ|}=\frac{|PF_1|}{|F_1Q|}$，$\frac{|PI|}{|IQ|}=\frac{|PF_2|}{|F_2Q|}$，

由比例关系性质可知$\frac{|PI|}{|IQ|}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|F_1Q|+|F_2Q|}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{2a}{2c}=\frac{a}{c}$.

又因为$\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{IQ}$，所以椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{|\overrightarrow{IQ}|}{|\overrightarrow{PI}|}=\frac{1}{2}$.

故选：A.



【点睛】

求解椭圆或双曲线的离心率的三种方法：

1、定义法：通过已知条件列出方程组，求得a,c得值，根据离心率的定义求解离心率e；