东营市一中 2021—2022 学年第一学期期中考试
高二数学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分，考试时间 120 分钟

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，其中 i 为虚数单位，则 $|z|=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

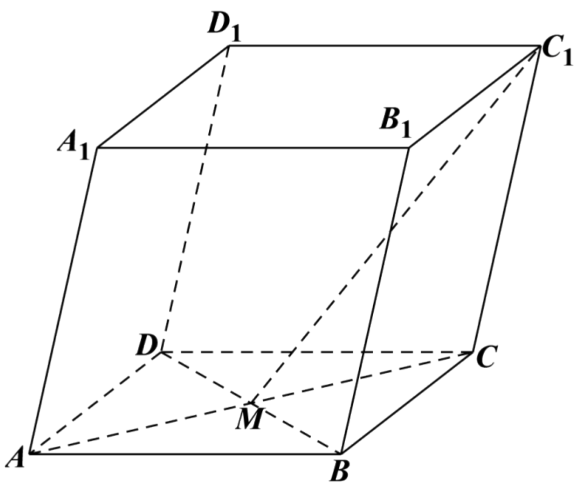
2. $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$ 的值是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{1}{16}$

3. 直线 $2x+(m+1)y-2=0$ 与直线 $mx+3y-2=0$ 平行，那么 m 的值是（　　）

A. 2　　B. -3　　C. 2 或 -3　　D. -2 或 -3

4. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AC 与 BD 的交点为点 M，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{C_1M}$ 相等的向量是（　　）



A. $-\dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}+\dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$　　B. $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

C. $-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$　　D. $-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

5. 已知$\vec{a}$、$\vec{b}$都是空间向量，且$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$，则$\langle 2\vec{a},-3\vec{b}\rangle=$（　　）

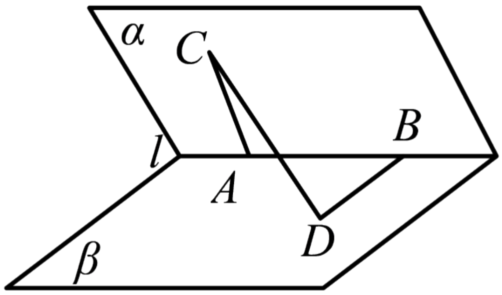
A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 从点$A(2,3)$射出的光线沿与向量$\vec{a}=(8,4)$平行的直线射到y轴上，则反射光线所在直线的方程为（　　）

A. $2x+y+1=0$　　B. $x+2y-4=0$

C. $x-2y+8=0$　　D. $2x-y+7=0$

7. 已知大小为$60°$的二面角$\alpha-l-\beta$棱上有两点A、B，$AC\subset\alpha$，$AC\perp l$，$BD\subset\beta$，$BD\perp l$，若$AC=3$，$BD=3$，$CD=7$，则AB的长为（　　）



A. 22　　B. 40　　C. $2\sqrt{10}$　　D. $\sqrt{22}$

8. 已知F_1，F_2是双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点，过点$F_1$倾斜角为30°的直线与双曲线的左，右两支分别交于点A，B. 若$|AF_2|=|BF_2|$，则双曲线C的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

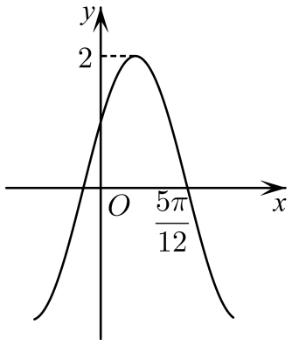
二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合腰目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

9. 已知向量$\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(2,-4)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$　　B. $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$

C. 向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$　　D. $\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影是$\sqrt{10}$

10. 若函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)\left(A>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图像如图所示，则下列叙述正确的是（　　）



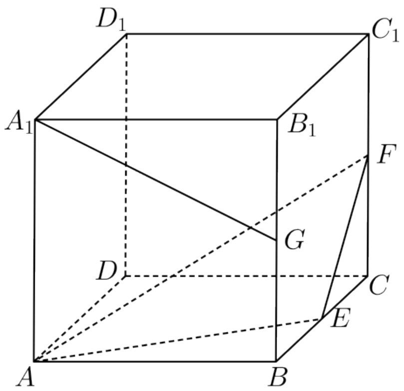
A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称

C. $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2$

D. $\left(-\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G 分别为 BC、CC_1、BB_1 的中点，则下列选项正确的是（　　）



A. $D_1D\perp AF$

B. 直线 A_1G 与 EF 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

C. 三棱锥 $G-AEF$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}$

D. 存在实数 λ、μ 使得 $\overrightarrow{A_1G}=\lambda\overrightarrow{AF}+\mu\overrightarrow{AE}$

12. 泰戈尔说过一句话：世界上最远的距离，不是树枝无法相依，而是相互了望的星星，却没有交汇的轨迹；世界上最远的距离，不是星星之间的轨迹，而是纵然轨迹交汇，却在转瞬间无处寻觅.已知点$F(1,0)$，直线$l:x=4$，动点P到点F的距离是点P到直线l的距离的一半.若某直线上存在这样的点P，则称该直线为“最远距离直线”，则下列结论中正确的是（　　）

A. 点P的轨迹方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

B. 直线l_1：$x+2y-4=0$是“最远距离直线”

C. 平面上有一点$A(-1,1)$，则$|PA|+2|PF|$的最小值为5.

D. 点P的轨迹与圆C：$x^2+y^2-2x=0$是没有交汇的轨迹（也就是没有交点）

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知空间向量$\vec{a}=(-3,2,5)$，$\vec{b}=(1,x,-1)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则x等于 ____.

14. 双曲线$C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的一条渐近线方程为$3x+2y=0$，则双曲线$C$的焦距为____________.

15. 已知直线$y=2x+1$与圆$x^2+y^2+ax+2y+1=0$交于A、B两点，直线$mx+y+2=0$垂直平分弦AB，则a的值为______.

16. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知$AA_1=AB=2AD=2$，E、F分别为BB_1、D_1C_1的中点，则三棱锥C_1-CEF的外接球半径为______，平面A_1BCD_1被三棱锥C_1-CEF外接球截得的截面圆面积为______.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

17. 已知△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a\sin C=\sqrt{3}c\cos A$.

（1）求角A.

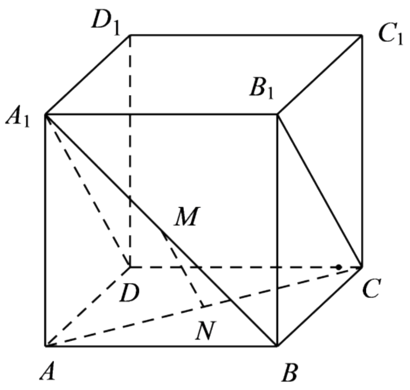
（2）若$a=\sqrt{7}$，$c=2$求△ABC的面积.

18. 已知圆C经过点$A(1,6)$和$B(-2,3)$，且圆心在直线$3x-y=0$上.

（1）求圆C的方程；

（2）过点 $P(4,1)$ 作圆 C 的切线，求切线方程.

19. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 2，M、N 分别为 A_1B 、AC 的中点.



（1）证明：$MN//$ 平面 BCC_1B_1；

（2）求 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角的大小.

20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，点 $P\left(1,2\right)$ 在抛物线 C 上.

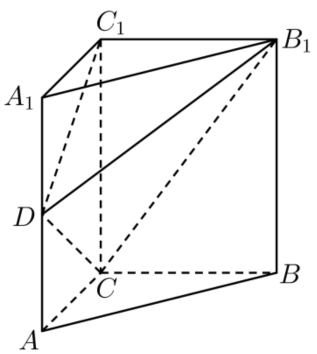
（1）求点 F 的坐标和抛物线 C 的准线方程；

（2）过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A、B 两点，且线段 AB 的中点为 $M\left(3,-2\right)$，求直线 l 的方程及 $|AB|$.

21. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AA_1 = BC = 2AC = 2$.

（1）若 D 为 AA_1 中点，求证：平面 $B_1CD \perp$ 平面 B_1C_1D；

（2）若二面角 B_1-DC-C_1 的大小为 60°，求 AD 的长.



22. 已知 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\left(a>b>0\right)$ 的上顶点到右顶点的距离为 $\sqrt{3}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，右焦点为 F，过点 F 的直线（不与 x 轴重合）与椭圆 C 相交于 A、B

两点，直线$l:x=2$与 x 轴相交于点 H，过点 A 作 $AD\perp l$，垂足为 D.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）①求四边形 $OAHB$（O 为坐标原点）面积的取值范围；

②证明直线 BD 过定点 E，并求出点 E 的坐标

东营市一中2021—2022学年第一学期期中考试

高二数学

本试卷共4页，22小题，满分150分，考试时间120分钟

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数z满足$z(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，其中i为虚数单位，则$|z|=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】将复数化简为$z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，再求模长即可.

【详解】由已知可得$z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则$|z|=\frac{|1-\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$，所以$z$得模为$1$.

故选：A.

2. $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$的值是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{16}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用二倍角正弦公式，计算求值.

【详解】$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$.

故选：B

3. 直线$2x+(m+1)y-2=0$与直线$mx+3y-2=0$平行，那么m的值是（　　）

A. 2　　B. -3　　C. 2或-3　　D. -2或-3

【答案】B

【解析】

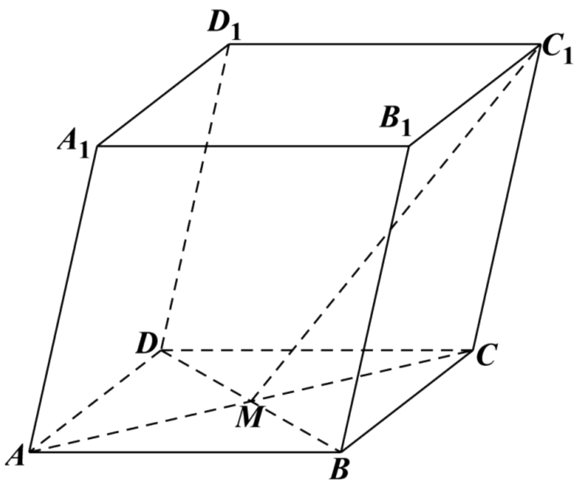
【分析】根据两直线平行的等价条件列方程组，解方程组即可求解.

【详解】因为直线 $2x+(m+1)y-2=0$ 与直线 $mx+3y-2=0$ 平行，

所以 $\begin{cases}2\times3=m(m+1)\\-2(m+1)\neq-2\times3\end{cases}$，解得：$m=-3$，

故选：B.

4. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AC 与 BD 的交点为点 M，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{C_1M}$ 相等的向量是（　　）



A. $-\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

C. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$　　D. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据空间向量的线性运算用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示出 $\overrightarrow{C_1M}$ 即可得.

【详解】$\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$.

故选：C.

5. 已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 都是空间向量，且 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$，则 $\langle2\vec{a},-3\vec{b}\rangle=$（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用空间向量的数量积运算即可得到答案

【详解】解：$\because \langle \vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle \vec{a},\vec{b}\rangle=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$，

$\therefore \cos\langle 2\vec{a},-3\vec{b}\rangle=\dfrac{2\vec{a}\cdot(-3\vec{b})}{|2\vec{a}|\cdot|-3\vec{b}|}=\dfrac{-6\vec{a}\cdot\vec{b}}{6|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$，

$\because \langle 2\vec{a},-3\vec{b}\rangle\in[0,\pi]$，　$\therefore \langle 2\vec{a},-3\vec{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，

故选：A

6. 从点 $A(2,3)$ 射出的光线沿与向量 $\vec{a}=(8,4)$ 平行的直线射到 y 轴上，则反射光线所在直线的方程为（　）

A. $2x+y+1=0$　　B. $x+2y-4=0$

C. $x-2y+8=0$　　D. $2x-y+7=0$

【答案】B

【解析】

【分析】求得A关于 y 轴的对称点，由此求得反射光线所在直线方程.

【详解】$A(2,3)$ 关于 y 轴的对称点为 $(-2,3)$，

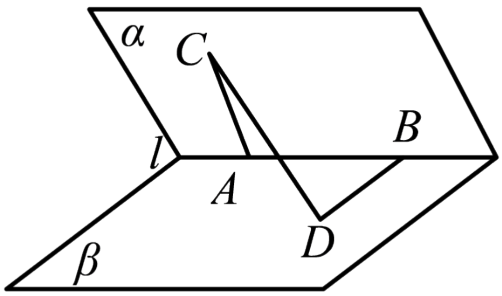
由于入射光线与 $\vec{a}=(8,4)$ 平行，

所以反射光线的斜率是 $-\dfrac{4}{8}=-\dfrac{1}{2}$，

所以反射光线所在直线方程为 $y-3=-\dfrac{1}{2}(x+2),x+2y-4=0$.

故选：B

7. 已知大小为 60° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 棱上有两点 A、B，$AC\subset\alpha$，$AC\perp l$，$BD\subset\beta$，$BD\perp l$，若 $AC=3$，$BD=3$，$CD=7$，则 AB 的长为（　）



A. 22　　　　B. 40　　　　C. $2\sqrt{10}$　　　　D. $\sqrt{22}$

【答案】C

【解析】

【分析】过 A 作 $AE//BD$ 且 $AE=BD$，连接 CE、DE，易得 $\angle CAE=60°$，通过线面垂直的判定定理可得 $ED\perp$ 平面 AEC，继而得到 $ED\perp EC$，即可求出答案

【详解】解：过 A 作 $AE//BD$ 且 $AE=BD$，连接 CE、DE，则四边形 $ABDE$ 是平行四边形，

因为 $BD\perp AB$,所以平行四边形 $ABDE$ 是矩形，

因为 $BD\perp l$，即 $AE\perp l$，而 $AC\perp l$，

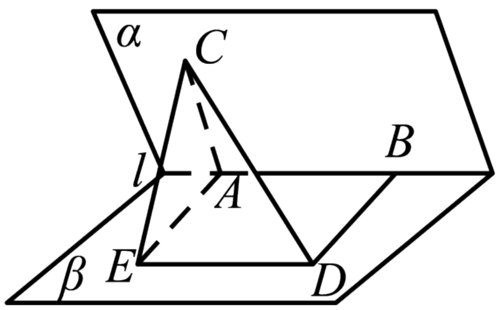
则 $\angle CAE$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，即 $\angle CAE=60°$，

因为 $BD=AE=AC=3$，即 $\triangle ACE$ 为正三角形，所以 $CE=3$，

因为 $ED\perp AE$，$l\perp AC$ 即 $ED\perp AC$，$AE\cap AC=A, AE, AC\subset$ 平面 AEC，

所以 $ED\perp$ 平面 AEC，因为 $EC\subset$ 平面 AEC，所以 $ED\perp EC$，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle EDC$ 中，$ED=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$，所以 $AB=ED=2\sqrt{10}$



故选：C

8. 已知 F_1，F_2 是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左，右焦点，过点 F_1 倾斜

角为30°的直线与双曲线的左，右两支分别交于点A，B. 若$|AF_2|=|BF_2|$，则双曲线C的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

【答案】A

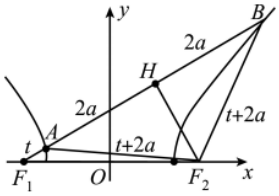
【解析】

【分析】设$|AF_1|=t$，据双曲线的定义可用t表示$|AF_2|,|BF_2|$，作$F_2H\perp AB=H$，构造直角三角形可计算得t，并用勾股定理列出了$\left(\sqrt{3}c\right)^2-c^2=(2a)^2$，进而可求$e$.

【详解】设$|AF_1|=t$，则$|AF_2|=t+2a=|BF_2|$，

从而$|BF_1|=t+4a$，进而$|BA|=4a$.

过F_2作$F_2H\perp AB=H$，则$|AH|=2a$. 如图：



在Rt△F_1F_2H中，$|F_2H|=2c\sin30°=c$，$|F_1H|=2c\cos\theta=\sqrt{3}c=|AF_2|$；

在Rt△AF_2H中，$\left(\sqrt{3}c\right)^2-c^2=(2a)^2$，

即$2c^2=4a^2$，所以$e=\sqrt{2}$.

故选：A

【点睛】（1）焦点三角形为条件求圆锥曲线的离心率，常利用圆锥曲线的定义；

（2）求圆锥曲线的离心率，常利用有关三角形建立关于a,b,c的齐次等式，再化为e的等式可求；

（3）此题的关键是作$F_2H\perp AB=H$得直角三角形，即可求出边长，又可用来建立a,b,c的齐次等式.

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合腰目要求．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．

9. 已知向量$\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(2,-4)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$

B. $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$

C. 向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\dfrac{3\pi}{4}$

D. $\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影是$\sqrt{10}$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据向量垂直、模、夹角的运算判断ABC选项的正确性，根据向量投影的计算公式判断D选项的正确性.

【详解】对选项A，$\vec{a}+\vec{b}=(3,-1)$，因为$(3,-1)\cdot(1,3)=3-3=0$，所以$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，故$A$正确；

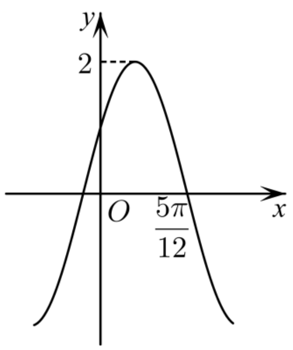
对选项B，$2\vec{a}+\vec{b}=(4,2)$，所以$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，故$B$错误；

对选项C，$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2-12}{\sqrt{10}\times\sqrt{20}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\dfrac{3\pi}{4}$，故$C$正确；

对选项D，$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影是$|\vec{b}|\cdot\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=2\sqrt{5}\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{10}$，故$D$错误.

故选：AC

10. 若函数$f(x)=A\sin(2x+\varphi)\left(A>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图像如图所示，则下列叙述正确的是（　　）



A. $f(x)$的最小正周期为π

B. 函数$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称

C. $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2$

D. $\left(-\dfrac{\pi}{12},0\right)$是函数$f(x)$图象的