

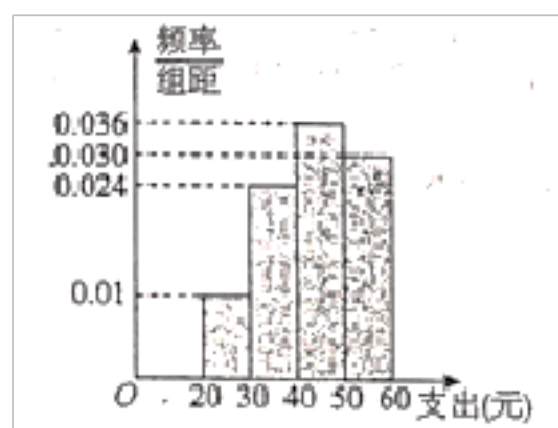
2023 年高考数学模拟试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 某学校为了调查学生在课外读物方面的支出情况, 抽取了一个容量为 n 的样本, 其频率分布直方图如图所示, 其中支出在 $[20, 40)$ (单位: 元) 的同学有 34 人, 则 n 的值为 ()



- A. 100 B. 1000 C. 90 D. 90

2. 在 $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}$ 条件下, 目标函数 $z = ax + by$ ($a > 0, b > 0$) 的最大值为 40, 则 $\frac{5}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 2

3. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 " $a_1 > 0$ " 是 " $S_{2021} > 0$ " 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$, 直线 $l_1: mx + y - 3m = 0$ 与直线 $l_2: x - my - 3 = 0$ 相交于点 P , 且 P 点在椭圆内恒成立, 则

椭圆 C 的离心率取值范围为 ()

- A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

5. 在复平面内, 复数 $z=i$ 对应的点为 Z , 将向量 \overrightarrow{OZ} 绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$, 所得向量对应的复数是 ()

- A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

6. 设递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_4 = \frac{40}{3}$, $3a_4 = 10a_3 = 3a_2 = 0$, 则 a_4 ()

A. 9 B. 27 C. 81 D. $\frac{8}{3}$

7. 已知集合 $A = \{x \mid 2 < x < 4\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$, 则 $A \cap B$

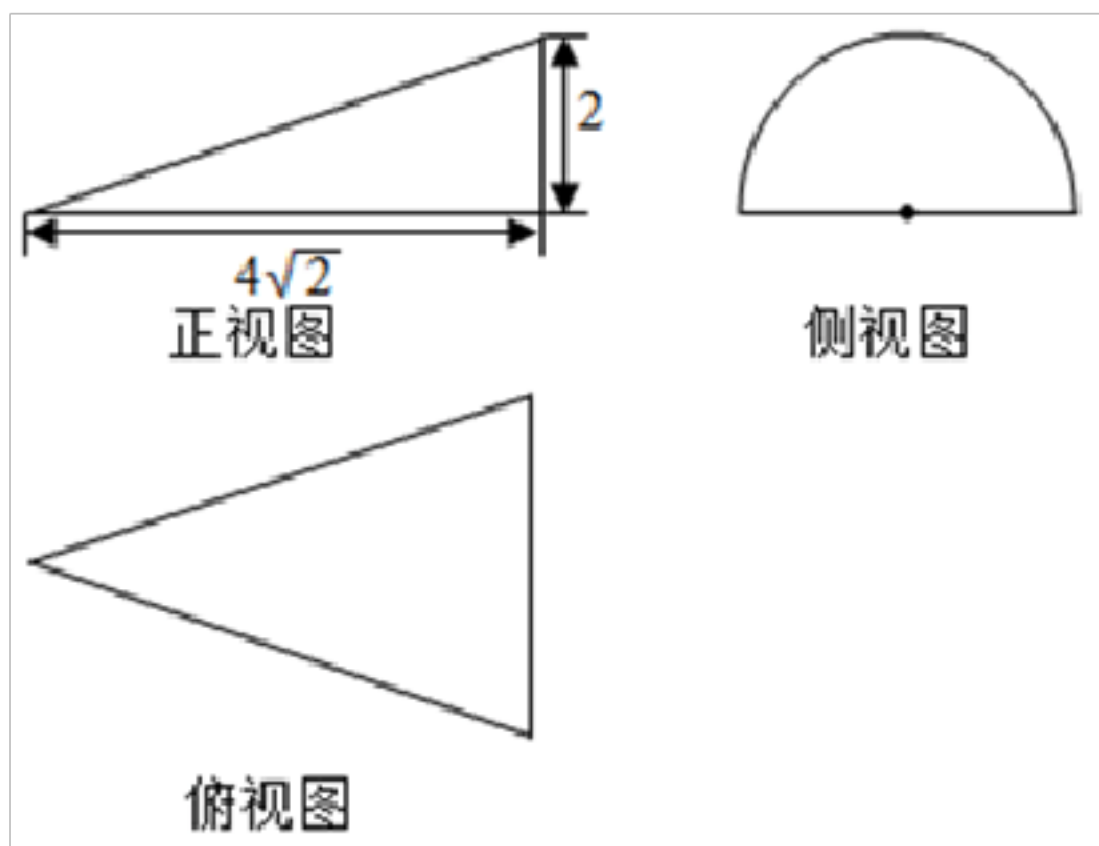
A. $\{x \mid 3 < x < 4\}$ B. $\{x \mid x < 4 \text{ 或 } x < 6\}$

C. $\{x \mid 2 < x < 1\}$ D. $\{x \mid 1 < x < 4\}$

8. 已知等边 $\triangle ABC$ 内接于圆 $\tau: x^2 + y^2 = 1$, 且 P 是圆 τ 上一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最大值是 ()

A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2

9. 一个几何体的三视图及尺寸如下图所示, 其中正视图是直角三角形, 侧视图是半圆, 俯视图是等腰三角形, 该几何体的表面积是 ()



A. $16\sqrt{2} + 16$

B. $16\sqrt{2} + 8$

C. $8\sqrt{2} + 16$

D. $8\sqrt{2} + 8$

10. 已知等式 $(1 - x + x^2)^3 (1 + 2x^2)^4 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{14} x^{14}$ 成立, 则 $a_2 + a_4 + \dots + a_{14}$ ()

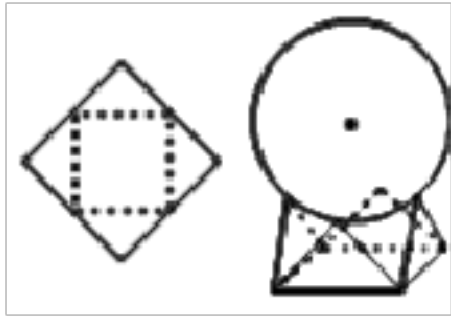
A. 0 B. 5 C. 7 D. 13

11. 设 $f(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_2(x - 1) + ax^2 + a - 1$ (a 为常数), 则不等式 $f(3x - 4) > 5$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(2, +\infty)$

12. 如图, 用一边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形硬纸, 按各边中点垂直折起四个小三角形, 做成一个蛋巢, 将体积为 $\frac{4}{3}$ 的鸡蛋 (视

为球体)放入其中, 蛋巢形状保持不变, 则鸡蛋中心(球心)与蛋巢底面的距离为()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 已知点 F 为双曲线 $E: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的右焦点, M, N 两点在双曲线上, 且 M, N 关于原点对称, 若 $|MF| = |NF|$, 设 $\angle MNF = \theta$, 且 $\theta \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6})$, 则该双曲线 E 的焦距的取值范围是_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c , 已知 $a^2 + c^2 = 2b^2$, 且 $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$, 则 b _____.

15. $\triangle ABC$ 的角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$, $\sin A = \sin B = 2\sqrt{6} \sin A \sin B$, 若 $c = 3$, 则 $a + b$ 的值为_____.

16. 在边长为4的菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 点 P 在菱形 $ABCD$ 所在的平面内. 若 $PA = 3, PC = \sqrt{21}$, 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$ _____.

三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1 = 2, b_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}, b_n = 2b_{n-1} + a_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

(1) 求证: 数列 $\frac{a_n}{b_n}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\frac{3^n}{a_n a_{n+1}}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{2\sqrt{3} \sin A}{3 \sin C}$.

(1) 求 b 的值;

(2) 若 $\cos B + \sqrt{3} \sin B = 2$, 求 $a + c$ 的取值范围.

19. (12分) 唐诗是中国文学的瑰宝. 为了研究计算机上唐诗分类工作中检索关键字的选取, 某研究人员将唐诗分成7大类别, 并从《全唐诗》48900多篇唐诗中随机抽取了500篇, 统计了每个类别及各类别包含“花”、“山”、“帘”字的篇数, 得到下表:

| | 爱情婚姻 | 咏史怀古 | 边塞战争 | 山水田园 | 交友送别 | 羁旅思乡 | 其他 | 总计 |
|--|------|------|------|------|------|------|----|----|
| | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|----------|-----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 篇数 | 100 | 64 | 55 | 99 | 91 | 73 | 18 | 500 |
| 含“山”字的篇数 | 51 | 48 | 21 | 69 | 48 | 30 | 4 | 271 |
| 含“帘”字的篇数 | 21 | 2 | 0 | 0 | 7 | 3 | 5 | 38 |
| 含“花”字的篇数 | 60 | 6 | 14 | 17 | 32 | 28 | 3 | 160 |

(1) 根据上表判断, 若从《全唐诗》含“山”字的唐诗中随机抽取一篇, 则它属于哪个类别的可能性最大, 属于哪个类别的可能性最小, 并分别估计该唐诗属于这两个类别的概率;

(2) 已知检索关键字的选取规则为:

①若有超过 95% 的把握判断“某字”与“某类别”有关系, 则“某字”为“某类别”的关键字;

②若“某字”被选为“某类别”关键字, 则由其对应列联表得到的 K^2 的观测值越大, 排名就越靠前;

设“山”“帘”“花”和“爱情婚姻”对应的 K^2 观测值分别为 k_1, k_2, k_3 . 已知 $k_1 = 0.516, k_2 = 31.962$, 请完成下面列联表, 并从上述三个字中选出“爱情婚姻”类别的关键字并排名.

| | 属于“爱情婚姻”类 | 不属于“爱情婚姻”类 | 总计 |
|----------|-----------|------------|----|
| 含“花”字的篇数 | | | |
| 不含“花”的篇数 | | | |
| 总计 | | | |

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

| | | | | |
|---|-----------|-------|-------|-------|
| P | $K^2 < k$ | 0.05 | 0.025 | 0.010 |
| k | | 3.841 | 5.024 | 6.635 |

$$l: \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

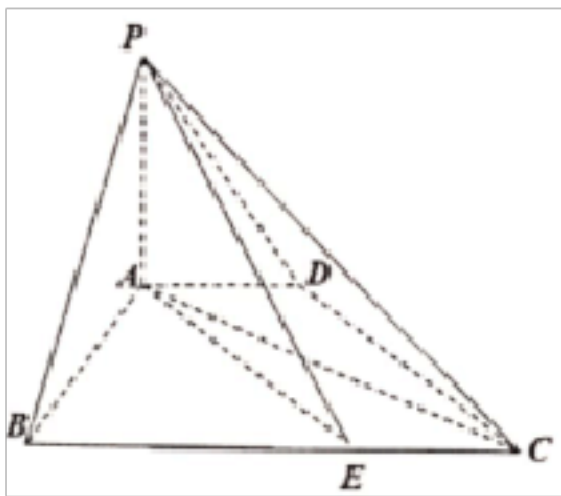
20. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 以坐标原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 M 的极坐标为 $(1, \frac{\pi}{2})$, 直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B , 求 $|MA| \cdot |MB|$ 的值.

21. (12分) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AD \parallel BC$, $PA \perp AD$, $AB = CD = 2$, $BC = 4$,

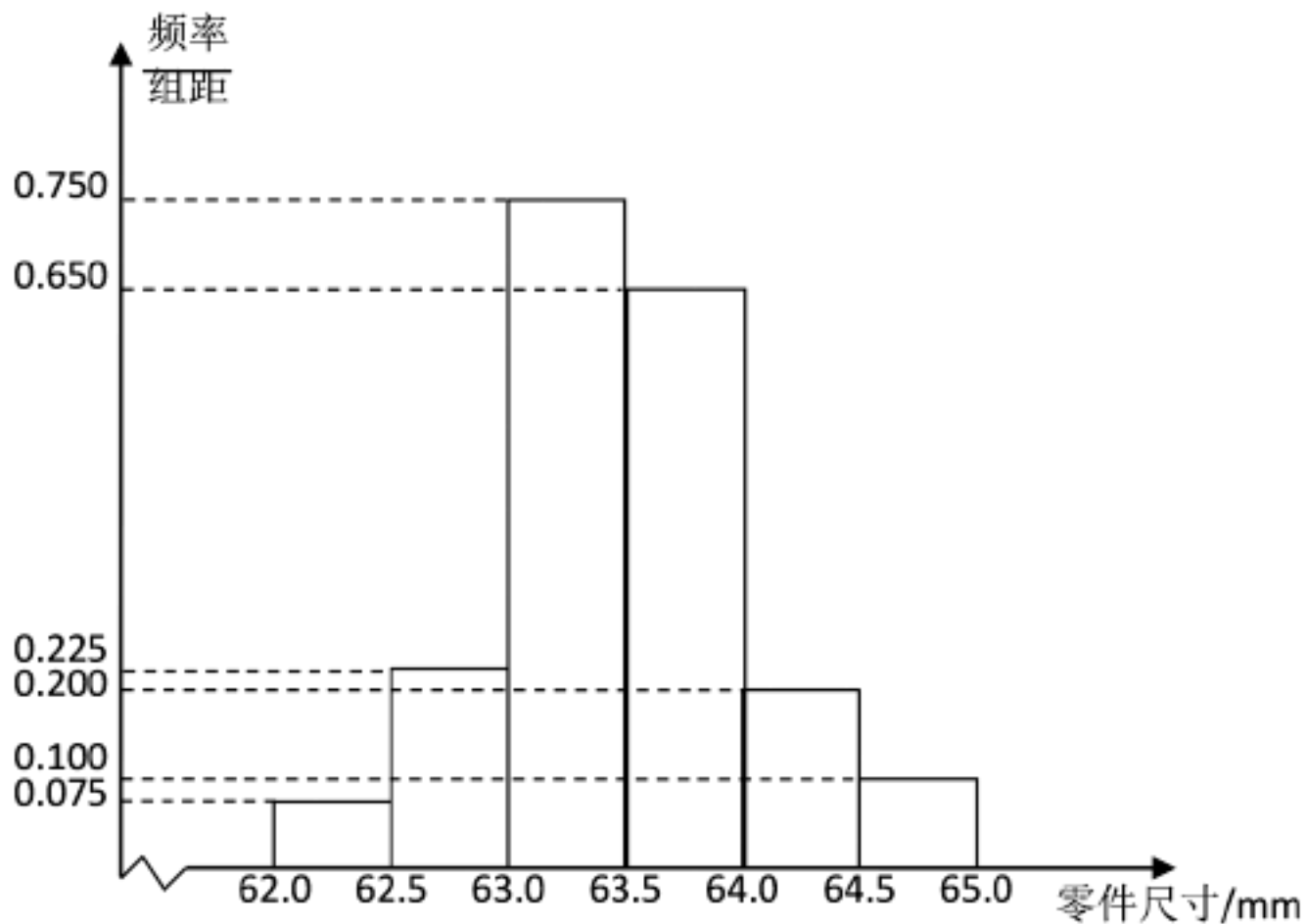
PA ⊥ 底面 ABCD .



(1) 证明：平面 PAC ⊥ 平面 PAB ；

(2) 过 PA 的平面交 BC 于点 E ，若平面 PAE 把四棱锥 P-ABCD 分成体积相等的两部分，求二面角 A-PE-B 的余弦值 .

22. (10 分) 某企业质量检验员为了检测生产线上零件的质量情况，从生产线上随机抽取了 80 个零件进行测量，根据所测量的零件尺寸 (单位：mm)，得到如下的频率分布直方图：



(1) 根据频率分布直方图，求这 80 个零件尺寸的中位数 (结果精确到 0.01)；

(2) 若从这 80 个零件中尺寸位于 62.5, 64.5 之外的零件中随机抽取 4 个，设 X 表示尺寸在 64.5, 65 上的零件个数，求 X 的分布列及数学期望 EX ；

(3) 已知尺寸在 63.0, 64.5 上的零件为一等品，否则为二等品，将这 80 个零件尺寸的样本频率视为概率. 现对生产线上生产的零件进行成箱包装出售，每箱 100 个. 企业在交付买家之前需要决策是否对每箱的所有零件进行检验，已知每个零件的检验费用为 99 元. 若检验，则将检验出的二等品更换为一等品；若不检验，如果有二等品进入买家手中，企业要向买家对每个二等品支付 500 元的赔偿费用. 现对一箱零件随机抽检了 11 个，结果有 1 个二等品，以整箱检验费

用与赔偿费用之和的期望值作为决策依据，该企业是否对该箱余下的所有零件进行检验？请说明理由。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

利用频率分布直方图得到支出在 $[20, 40)$ 的同学的频率，再结合支出在 $[20, 40)$ (单位：元) 的同学有 34 人，即得解

【详解】

由题意，支出在 $[20, 40)$ (单位：元) 的同学有 34 人

由频率分布直方图可知，支出在 $[20, 40)$ 的同学的频率为

$$(0.01 + 0.024) \times 10 = 0.34, \quad n = \frac{34}{0.34} = 100.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了频率分布直方图的应用，考查了学生概念理解，数据处理，数学运算的能力，属于基础题。

2、B

【解析】

画出可行域和目标函数，根据平移得到最值点，再利用均值不等式得到答案。

【详解】

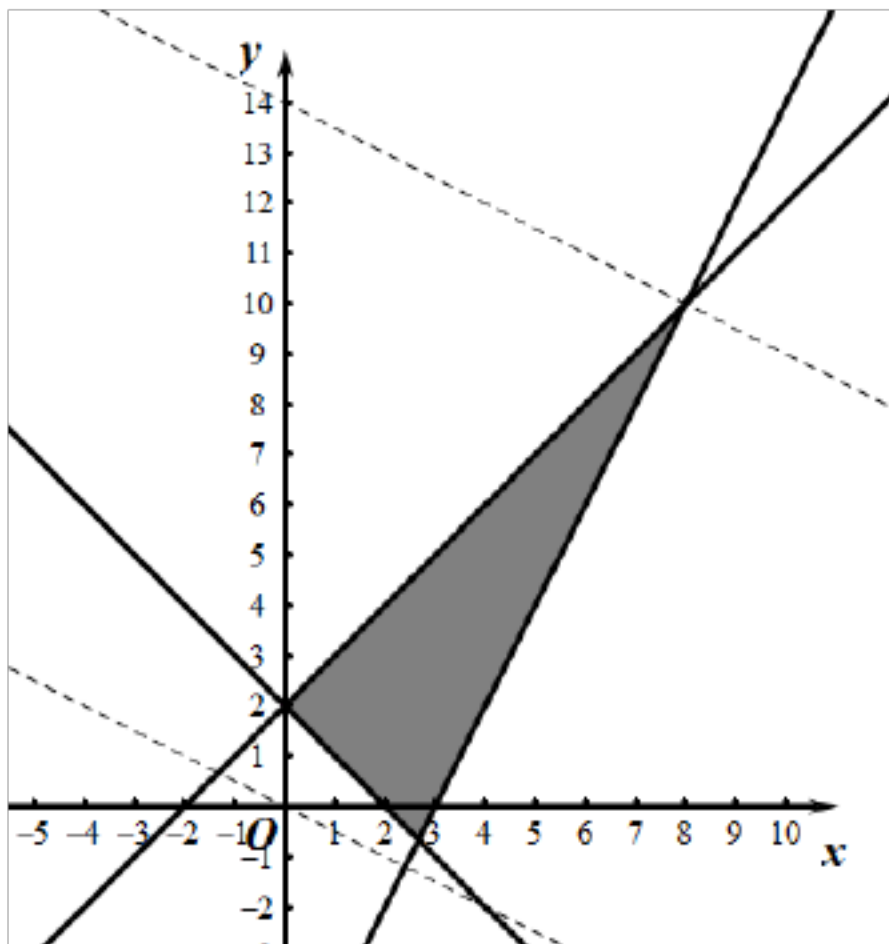
如图所示，画出可行域和目标函数，根据图像知：

当 $x = 8, y = 10$ 时， $z = 8a + 10b$ 有最大值为 40，即 $z = 8a + 10b = 40$ ，故 $4a + 5b = 20$ 。

$$\frac{5}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{20} + \frac{5}{a} + \frac{1}{b} = 4a + 5b = \frac{1}{20} + 25 + \frac{25b}{a} + \frac{4a}{b} = \frac{1}{20} + 25 + 2\sqrt{100} = \frac{9}{4}.$$

当 $\frac{25b}{a} = \frac{4a}{b}$ ，即 $a = \frac{10}{3}, b = \frac{4}{3}$ 时等号成立。

故选：B。



【点睛】

本题考查了线性规划中根据最值求参数，均值不等式，意在考查学生的综合应用能力.

3、C

【解析】

根据等比数列的前 n 项和公式，判断出正确选项.

【详解】

由于数列 a_n 是等比数列，所以 $S_{2021} = a_1 \frac{1 - q^{2021}}{1 - q}$ ，由于 $\frac{1 - q^{2021}}{1 - q} > 0$ ，所以

$a_1 > 0 \iff S_{2021} > 0$ ，故“ $a_1 > 0$ ”是“ $S_{2021} > 0$ ”的充分必要条件.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查充分、必要条件的判断，考查等比数列前 n 项和公式，属于基础题.

4、A

【解析】

先求得椭圆焦点坐标，判断出直线 l_1, l_2 过椭圆的焦点. 然后判断出 $l_1 \perp l_2$ ，判断出 P 点的轨迹方程，根据 P 恒在椭圆内列不等式，化简后求得离心率 e 的取值范围.

【详解】

设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 是椭圆的焦点，所以 $c^2 = a^2 - 9 = a^2 - 9, c = 3$. 直线 l_1 过点 $F_1(-3, 0)$ ，直线 l_2 过点 $F_2(3, 0)$ ，由于 $m_1 m_2 = -1$ ，所以 $l_1 \perp l_2$ ，所以 P 点的轨迹是以 F_1, F_2 为直径的圆 $x^2 + y^2 = 9$. 由于 P 点在椭圆内恒成立，

所以椭圆的短轴大于 3，即 $a^2 - 3^2 > 9$ ，所以 $a^2 > 18$ ，所以双曲线的离心率 $e^2 = \frac{9}{a^2 - 9} < \frac{1}{2}$ ，所以

$$e \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

故选：A

【点睛】

本小题主要考查直线与直线的位置关系，考查动点轨迹的判断，考查椭圆离心率的取值范围的求法，属于中档题.

5、A

【解析】

由复数 z 求得点 Z 的坐标，得到向量 \overrightarrow{OZ} 的坐标，逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ ，得到向量 \overrightarrow{OB} 的坐标，则对应的复数可求.

【详解】

解：∵复数 $z=i$ (i 为虚数单位) 在复平面中对应点 $Z(0, 1)$,

∴ $\overrightarrow{OZ} = (0, 1)$ ，将 \overrightarrow{OZ} 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 得到 \overrightarrow{OB} ，

设 $\overrightarrow{OB} = (a, b)$ ， $a > 0, b > 0$ ，

则 $\overrightarrow{OZ} \cdot \overrightarrow{OB} = b = |\overrightarrow{OZ}| |\overrightarrow{OB}| \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

即 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

又 $a^2 + b^2 = 1$ ，

解得： $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

∴ $\overrightarrow{OB} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，

对应复数为 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题.

6、A

【解析】

根据两个已知条件求出数列的公比和首项，即得 a_4 的值.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

由 $3a_4 = 10a_3 = 3a_2 = 0$ ，得 $3q^2 = 10q = 3 = 0$ ，解得 $q = 3$ 或 $q = \frac{1}{3}$ 。

因为 $S_4 > 0$ 且数列 $\{a_n\}$ 递增，所以 $q = 3$ 。

又 $S_4 = \frac{a(1-3^4)}{1-3} = \frac{40}{3}$, 解得 $a = \frac{1}{3}$,

故 $a_4 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$.

故选: A

【点睛】

本题主要考查等比数列的通项和求和公式, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7、C

【解析】

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 可得 $(x-6)(x-1) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 6$, 所以 $B = \{x | x = 1 \text{ 或 } x = 6\}$,

又 $A = \{x | 2 < x < 4\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 2 < x < 4\}$, 故选 C.

8、D

【解析】

如图所示建立直角坐标系, 设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, 则 $\overrightarrow{PA} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = 1 + \cos \theta$, 计算得到答案.

【详解】

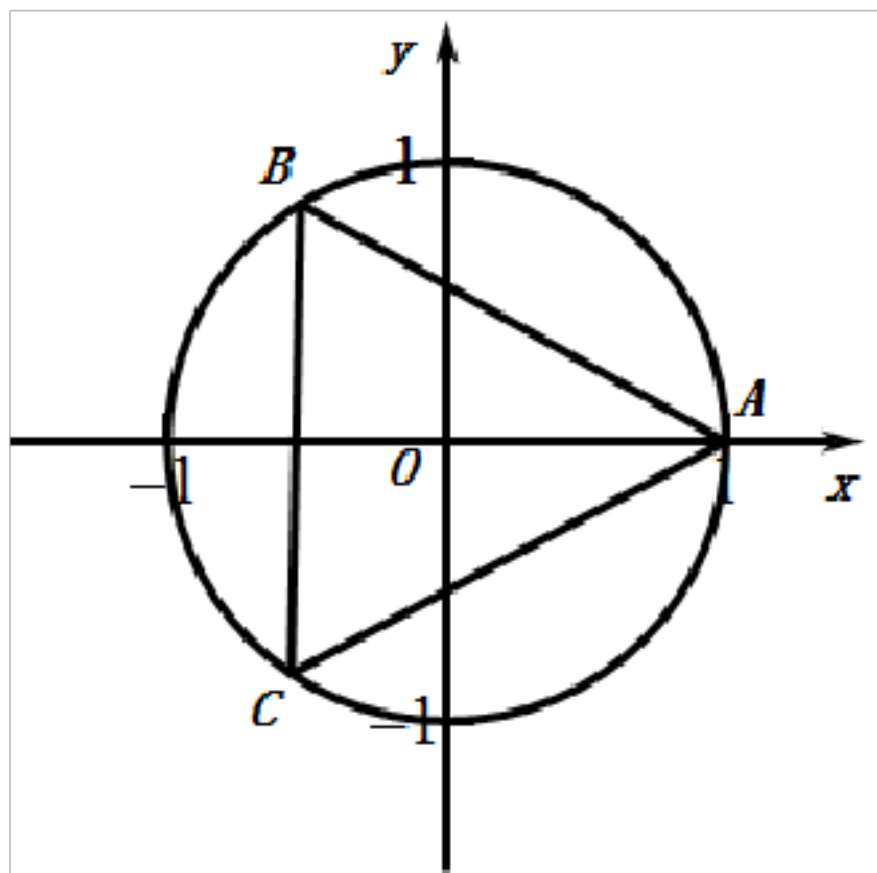
如图所示建立直角坐标系, 则 $A(1, 0)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$,

则 $\overrightarrow{PA} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = (1 + \cos \theta, \sin \theta) + (1 - 2\cos \theta, 2\sin \theta)$

$$(1 + \cos \theta)(1 - 2\cos \theta) + 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 + 2\sin^2 \theta = 1 - \cos \theta = 2.$$

当 $\cos \theta = -1$, 即 $P(-1, 0)$ 时等号成立.

故选: D.



【点睛】

本题考查了向量的计算, 建立直角坐标系利用坐标计算是解题的关键.

9、D

【解析】

由三视图可知该几何体的直观图是轴截面在水平面上的半个圆锥，表面积为

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 6 + 8\sqrt{2} \times 8$$

,故选 D.

10、D

【解析】

根据等式和特征和所求代数式的值的特征用特殊值法进行求解即可.

【详解】

由 $(1-x-x^2)^3(1-2x^2)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{14}x^{14}$ 可知:

$$\text{令 } x=0, \text{ 得 } a_0 = 1;$$

$$\text{令 } x=1, \text{ 得 } a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{14} = 1 \quad (1);$$

$$\text{令 } x=-1, \text{ 得 } a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{14} = 27 \quad (2);$$

$$(2) - (1) \text{ 得, } 2(a_1 - a_3 + a_5 - \dots - a_{13}) = 28 \Rightarrow a_1 - a_3 + a_5 - \dots - a_{13} = 14, \text{ 而 } a_0 = 1, \text{ 所以}$$

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{14} = 13.$$

故选: D

【点睛】

本题考查了二项式定理的应用,考查了特殊值代入法,考查了数学运算能力.

11、D

【解析】

由 $f(0) = 0$ 可得 $a = 1$, 所以 $f(x) = \log_2(x-1) - x^2 (x > 0)$, 由 $f(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的奇函数结合增函数+增函数=增函数, 可知 $y = f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 注意到 $f(2) = f(2) = 5$, 再利用函数单调性即可解决.

【详解】

因为 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上是奇函数. 所以 $f(0) = 0$, 解得 $a = 1$, 所以当 $x > 0$ 时,

$f(x) = \log_2(x-1) - x^2$, 且 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增, 所以

$y = f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 因为 $f(2) = 5, f(-2) = -5$,

故有 $3x - 4 = 2$, 解得 $x = 2$.

故选: D.

【点睛】

本题考查利用函数的奇偶性、单调性解不等式, 考查学生对函数性质的灵活运用能力, 是一道中档题.

12、D

【解析】

先求出球心到四个支点所在球的小圆的距离, 再加上侧面三角形的高, 即可求解.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/648014010001007005>