

第一章 特殊平行四边形

专题1 矩形、正方形中的四个常考模型



目录

CONTENTS



专题解读



典例讲练

01

专题解读



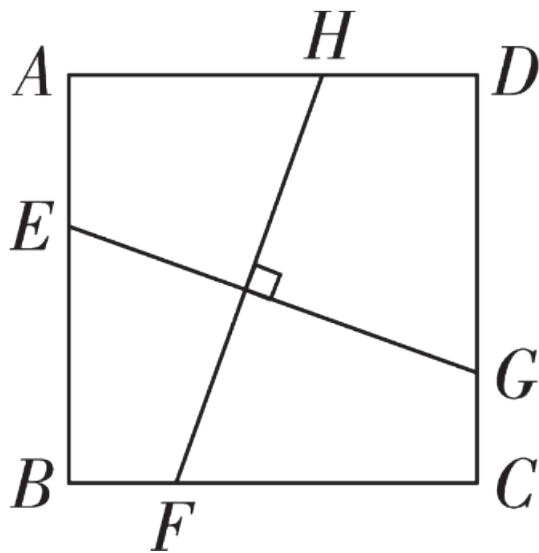
◎问题综述

几何变换主要是平移、翻折、旋转三大变换，它们最大的特征都是只改变图形的位置，而不改变图形的形状和大小.四边形作为初中阶段最核心的内容之一，逐渐被用来作为呈现知识和能力的载体.

常见模型如下：

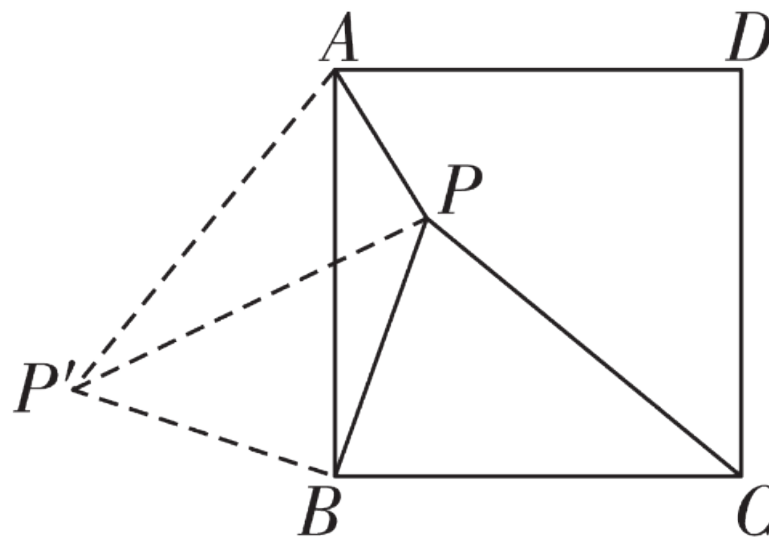
1. 折叠中的“十字架”模型.

如图，在正方形 $ABCD$ 中， $EG \perp FH$ ，则有 $EG = FH$.



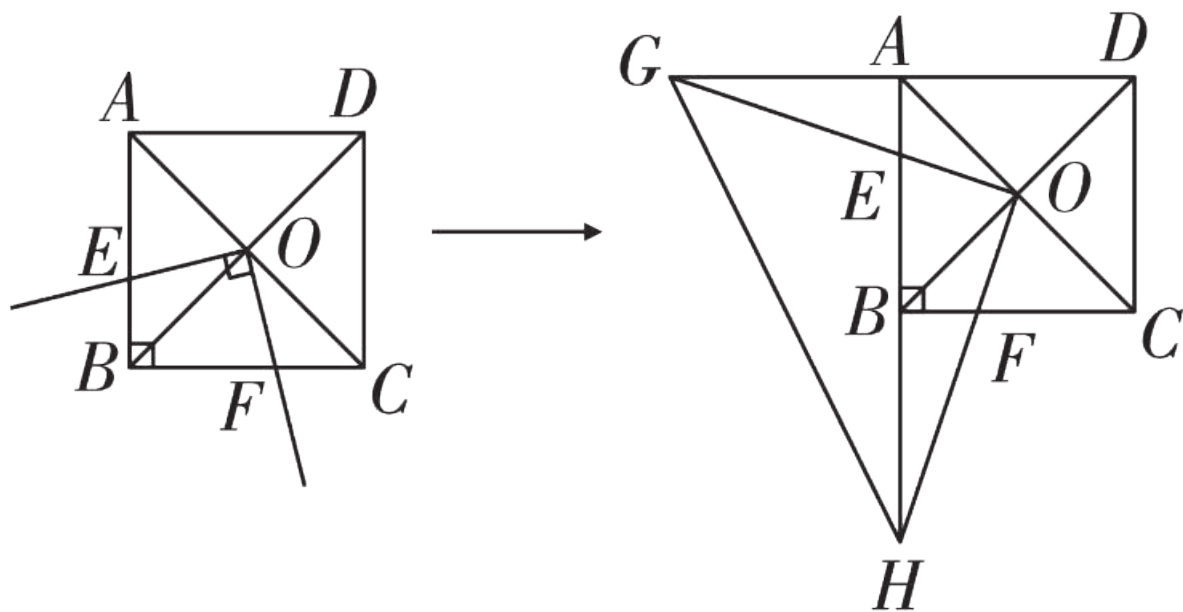
2. 旋转中的“手拉手”模型.

如图，将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° ，可得到 $\triangle BP'A$ ，则 $\triangle BPP'$ 为等腰直角三角形.



3. 旋转中的“K”模型.

如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 O 为对角线的交点，直角 EOF 绕点 O 旋转. 若 OE ， OF 分别与射线 DA ， AB 交于点 G ， H ，则 $\triangle AGO \cong \triangle BHO$ ， $\triangle OGH$ 是等腰直角三角形.



4. 正方形中的半角模型.

从正方形的一个顶点出发的两条线所夹的角等于正方形内角的一半，并且与正方形的边（或其延长线）相交.

(1) 如图1，在正方形 $ABCD$ 中，若 $\angle EAF = 45^\circ$ ，则：

- ① $EF = BE + DF$;
- ② $\triangle CEF$ 的周长为正方形 $ABCD$ 边长的2倍;
- ③ FA 平分 $\angle DFE$ ， EA 平分 $\angle BEF$;
- ④ $MN^2 = BM^2 + DN^2$.

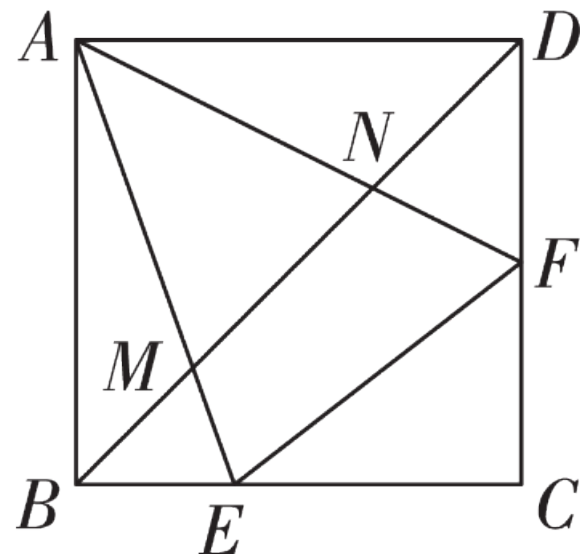


图1

(2) 如图2, 在正方形 $ABCD$ 中, 若 $\angle EAF = 45^\circ$, FA 平分 $\angle DFE$, 则 $EF = DF - BE$.

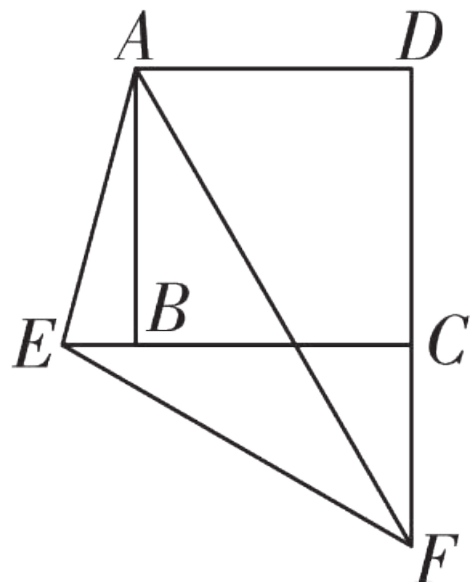


图2

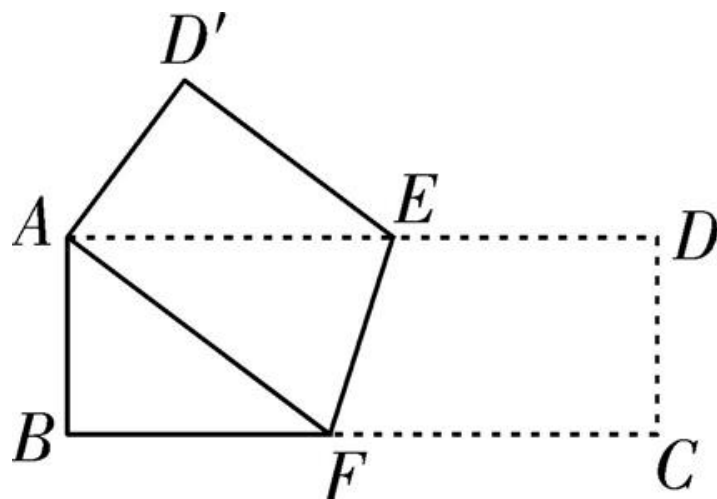
02

典例讲练



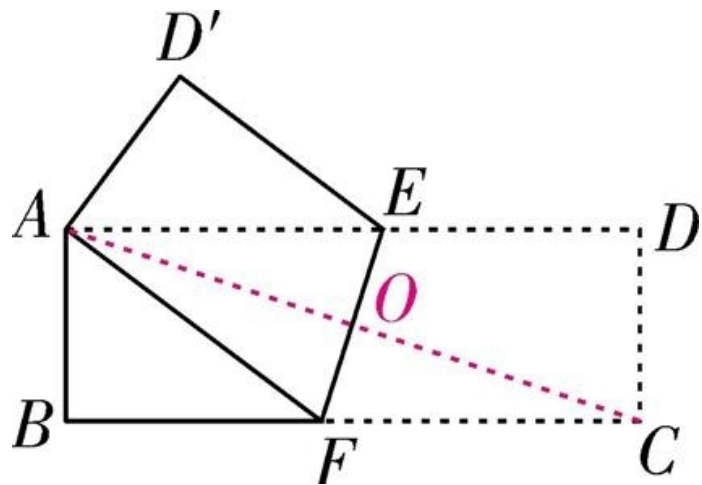
类型一 折叠中的“十字架”模型

例1 如图， $ABCD$ 是一张矩形纸片， $AB=3$ ， $BC=9$. 在边 AD 上取一点 E ，在 BC 上取一点 F ，将纸片沿 EF 折叠，点 C 恰好落在点 A 处，点 D 落在点 D' 处，则线段 EF 的长度为 $\sqrt{10}$.



【思路导航】 连接 AC ，交 EF 于点 O . 首先根据勾股定理求出 AF ， AC 的长，再根据勾股定理求出 OF 的长，即可解决问题.

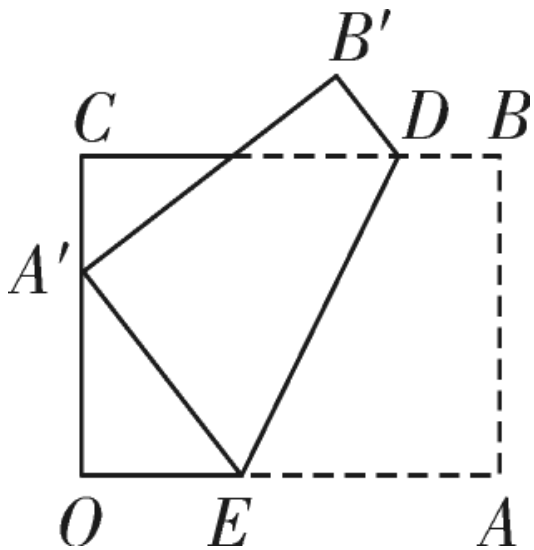
【解析】如图，连接 AC 交 EF 于点 O . 由题意，得 $AO = CO$, $EF \perp AC$. 令 $AF = CF = x$, 则 $BF = 9 - x$. \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore \angle B = 90^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, 由勾股定理, 得 $x^2 = 3^2 + (9 - x)^2$. 解得 $x = 5$. $\therefore AF = 5$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AC^2 = 3^2 + 9^2 = 90$. $\therefore AC = 3\sqrt{10}$. \because 矩形 $ABCD$ 是中心对称图形, $\therefore AE = CF$, $AO = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. 又 $\because AF = CF$, $\therefore AE = AF$. $\because AO \perp EF$, $\therefore OE = OF$.



【点拨】矩形的翻折变换其本质就是“十字架”模型，关键是
根据翻折变换的性质找出图形中隐含的等量关系，灵活运用勾
股定理来解决线段长度问题.

变式训练

如图，在矩形 $OABC$ 中， $OA=4$ ， $AB=3$ ，点 D 在边 BC 上，且 $CD=3DB$ ，点 E 是边 OA 上一点，连接 DE ，将四边形 $ABDE$ 沿 DE 折叠. 若点 A 的对应点 A' 恰好落在边 OC 上，点 B 为点 B' 的对应点，则 OE 的长为 $\frac{3}{2}$.



【解析】如图，连接 $A'D$ ， AD 。

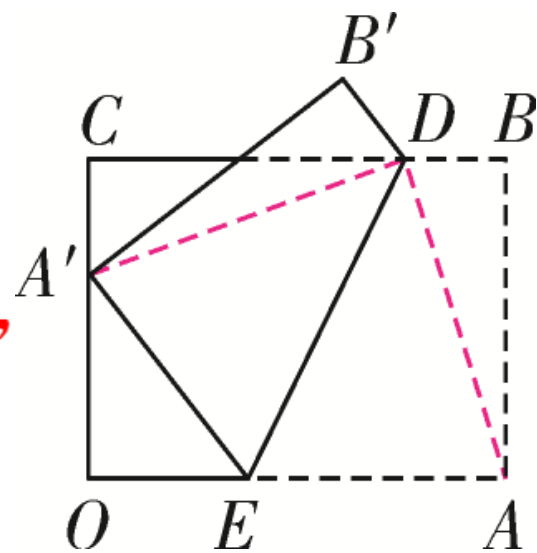
\because 四边形 $OABC$ 是矩形， $\therefore BC = OA = 4$ ， $OC = AB = 3$ ， $\angle C = \angle B = \angle O = 90^\circ$ 。 $\because CD = 3DB$ ， $\therefore CD = 3$ ， $BD = 1$ 。 $\therefore CD = AB$ 。 \because 将四边形 $ABDE$ 沿 DE 折叠，点 A 的对应点 A' 恰好落在边 OC 上， $\therefore A'D = AD$ ， $A'E = AE$ 。在 $\text{Rt}\triangle A'CD$ 和 $\text{Rt}\triangle DBA$ 中，

$$\begin{cases} A'D = DA, \\ CD = BA, \end{cases} \therefore \text{Rt}\triangle A'CD \cong \text{Rt}\triangle DBA \text{ (HL)} .$$

$\therefore A'C = DB = 1$ 。 $\therefore A'O = 2$ 。在 $\text{Rt}\triangle A'OE$ 中，

$$\because A'O^2 + OE^2 = A'E^2, \therefore 2^2 + OE^2 = (4 - OE)^2,$$

解得 $OE = \frac{3}{2}$ 。故答案为 $\frac{3}{2}$ 。



类型二 旋转中的“手拉手”模型

例2 一节数学课上，老师提出了这样一个问题：如图1，点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点， $PA=1$ ， $PB=2$ ， $PC=3$.你能求出 $\angle APB$ 的度数吗？

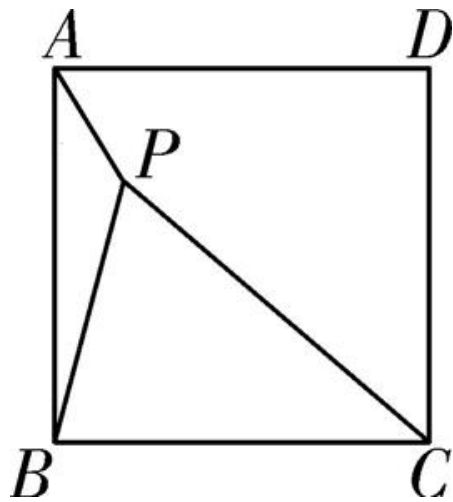


图1

小明通过观察、分析、思考，形成了如下思路：

思路一：将 $\triangle BPC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转 90° ，得到 $\triangle BP'A$ ，连接 PP' ，求出 $\angle APB$ 的度数；

思路二：将 $\triangle APB$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° ，得到 $\triangle CP'B$ ，连接 PP' ，求出 $\angle APB$ 的度数。

(1) 请参考小明的思路，任选一种写出完整的解答过程；

(2) 类比探究：如图2，若点 P 是正方形 $ABCD$ 外一点， $PA = 3$ ， $PB = 1$ ， $PC = \sqrt{11}$ ，求 $\angle APB$ 的度数.

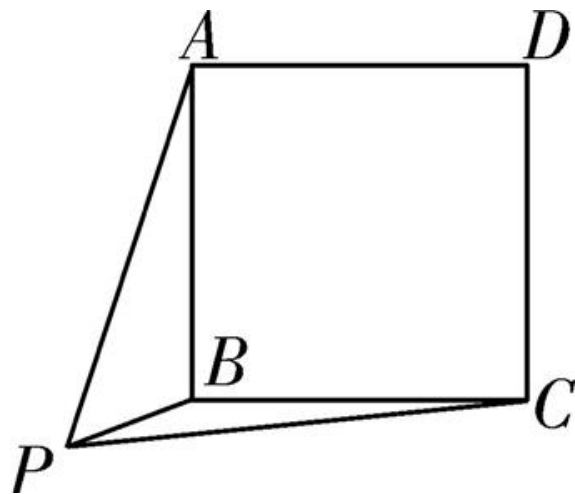


图2

【思路导航】 (1) 利用旋转法构造全等三角形以及直角三角形的判定, 即可解决问题; (2) 先利用旋转求出 $\angle PBP'$, $P'B$, $P'A$, 利用勾股定理求出 PP' , 进而判断出 $\triangle APP'$ 是直角三角形, 得出 $\angle APP' = 90^\circ$, 即可得出结果.

解：（1）思路一：如图1，将 $\triangle BPC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转 90° ，得到 $\triangle BP'A$ ，连接 PP' ，则 $\triangle ABP' \cong \triangle CBP$ ，
 $\angle PBP' = 90^\circ$ ， $P'B = PB = 2$ ， $P'A = PC = 3$ 。
 在 $\text{Rt}\triangle PBP'$ 中， $PB = P'B = 2$ ， $\therefore \angle BPP' = 45^\circ$ 。

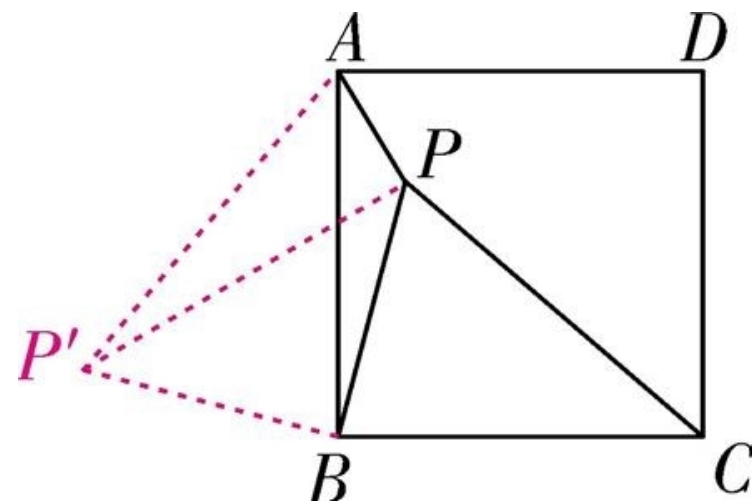


图1

根据勾股定理，得 $PP' = \sqrt{2}PB = 2\sqrt{2}$.

$$\because PA = 1,$$

$$\therefore PA^2 + PP'^2 = 1 + 8 = 9.$$

$$\text{又} \because P'A^2 = 3^2 = 9,$$

$$\therefore PA^2 + PP'^2 = P'A^2.$$

$\therefore \triangle APP'$ 是直角三角形，且 $\angle APP' = 90^\circ$.

$$\therefore \angle APB = \angle APP' + \angle BPP' = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

(两个思路任选其一进行证明，合理即可)

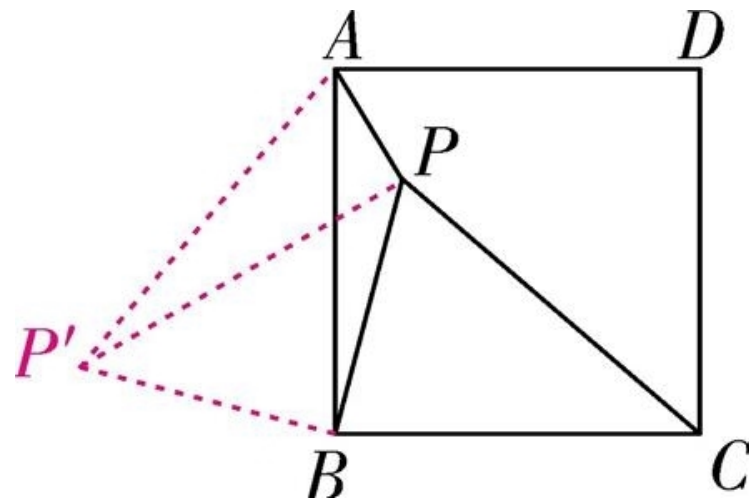


图1

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/655144003022011240>