

## 2022-2023 学年山西省怀仁一中高三下学期学习能力诊断（一模）数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 生活中人们常用“通五经贯六艺”形容一个人才识技艺过人，这里的“六艺”其实源于中国周朝的贵族教育体系，具体包括“礼、乐、射、御、书、数”。为弘扬中国传统文化，某校在周末学生业余兴趣活动中开展了“六艺”知识讲座，每艺安排一节，连排六节，则满足“数”必须排在前两节，“礼”和“乐”必须分开安排的概率为（ ）

- A.  $\frac{7}{60}$       B.  $\frac{1}{6}$       C.  $\frac{13}{60}$       D.  $\frac{1}{4}$

2. 若复数  $z = \frac{1-bi}{2+i}$  ( $b \in R, i$  为虚数单位) 的实部与虚部相等，则  $b$  的值为( )

- A. 3      B.  $\pm 3$       C. -3      D.  $\pm\sqrt{3}$

3. 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，且  $S_4 = a_4 + 3$ ，则  $a_2 =$  ( )

- A. -2      B. -1      C. 1      D. 2

4. 在直角坐标系中，已知  $A(1, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，若直线  $x+my-1=0$  上存在点  $P$ ，使得  $|PA|=2|PB|$ ，则正实数  $m$  的最小值是( )

- A.  $\frac{1}{3}$       B. 3      C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       D.  $\sqrt{3}$

5. 设全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{x | 0 < x \leq 2\}$ ， $B = \{x | x < 1\}$ ，则集合  $A \cup B =$  ( )

- A.  $(2, +\infty)$       B.  $[2, +\infty)$       C.  $(-\infty, 2]$       D.  $(-\infty, 1]$

6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于  $x$  的方程  $f(x) = kx - \frac{1}{2}$  恰有 4 个不相等的实数根，则实数  $k$  的取值范围

是( )

- A.  $(\frac{1}{2}, \sqrt{e})$       B.  $[\frac{1}{2}, \sqrt{e})$

- C.  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}]$       D.  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}]$

7. 已知  $i$  为虚数单位，实数  $x, y$  满足  $(x+2i)i = y-i$ ，则  $|x-yi| =$  ( )

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D.  $\sqrt{5}$

8. 已知命题  $p$ :  $m=1$  是“直线  $x-my=0$  和直线  $x+my=0$  互相垂直”的充要条件; 命题  $q$ : 函数  $f(x)=x+\frac{4}{x}$  的最小值为 4. 给出下列命题: ①  $p \wedge q$ ; ②  $p \vee q$ ; ③  $p \wedge (\neg q)$ ; ④  $(\neg p) \wedge (\neg q)$ , 其中真命题的个数为( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

9. 已知平面向量  $\vec{a}=(4,2)$ ,  $\vec{b}=(x,3)$ ,  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则实数  $x$  的值等于( )

- A. 6                      B. 1                      C.  $\frac{3}{2}$                       D.  $-\frac{3}{2}$

10. 若等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_{13}=0$ ,  $a_3+a_4=21$ , 则  $S_7$  的值为( ).

- A. 21                      B. 63                      C. 13                      D. 84

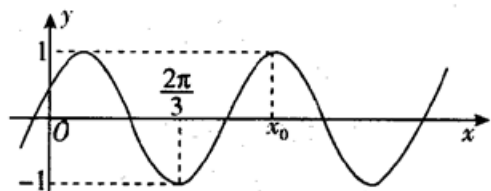
11. 已知  $f(x)=1-2\cos^2(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ . 给出下列判断:

- ①若  $f(x_1)=1, f(x_2)=-1$ , 且  $|x_1-x_2|_{\min}=\pi$ , 则  $\omega=2$ ;  
 ②存在  $\omega \in (0,2)$  使得  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后得到的图象关于  $y$  轴对称;  
 ③若  $f(x)$  在  $[0,2\pi]$  上恰有 7 个零点, 则  $\omega$  的取值范围为  $[\frac{41}{24}, \frac{47}{24})$ ;  
 ④若  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$  上单调递增, 则  $\omega$  的取值范围为  $(0, \frac{2}{3}]$ .

其中, 判断正确的个数为( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

12. 已知函数  $f(x)=2\cos x \cdot \sin(x+\frac{\pi}{6})+m$  ( $m \in \mathbf{R}$ ) 的部分图象如图所示. 则  $x_0 =$  ( )



- A.  $\frac{3\pi}{2}$                       B.  $\frac{5\pi}{6}$   
 C.  $\frac{7\pi}{6}$                       D.  $-\frac{4\pi}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_1+a_4+a_7=99$ ,  $a_2+a_5+a_8=93$ , 若对任意  $n \in \mathbf{N}^*$  都有

$S_n \leq S_k$  成立, 则  $k$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 某市高三理科学生有15000名, 在一次调研测试中, 数学成绩  $\xi$  服从正态分布  $N(100, \sigma^2)$ , 已知  $P(80 < \xi \leq 100) = 0.40$ , 若按成绩分层抽样的方式取100份试卷进行分析, 则应从120分以上的试卷中抽取的份数为\_\_\_\_\_.

15. 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 满足  $a_1 = 2$ ,  $3S_n = (n+m)a_n (n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{R})$ , 且  $a_n b_n = n+1$ . 若任意  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \leq T_{2n} - T_n$  成立, 则实数  $\lambda$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

16. 如图所示梯子结构的点数依次构成数列  $\{a_n\}$ , 则  $a_{100} =$ \_\_\_\_\_.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

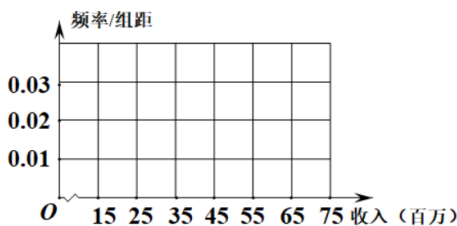
17. (12分) 已知函数  $f(x) = |ax+1| + |x-1|$ .

- (1) 若  $a = 2$ , 解关于  $x$  的不等式  $f(x) < 9$ ;
- (2) 若当  $x > 0$  时,  $f(x) > 1$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

18. (12分) 某市调研机构对该市工薪阶层对“楼市限购令”态度进行调查, 抽调了 50 名市民, 他们月收入频数分布表和对“楼市限购令”赞成人数如下表:

月收入 (单位: 百元)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 75)
频数	5	$c$		10	5	5
频率	0.1	$a$	$b$	0.2	0.1	0.1
赞成人数	4	8	12	5	2	1

(1) 若所抽调的 50 名市民中, 收入在  $[35, 45)$  的有 15 名, 求  $a, b, c$  的值, 并完成频率分布直方图.

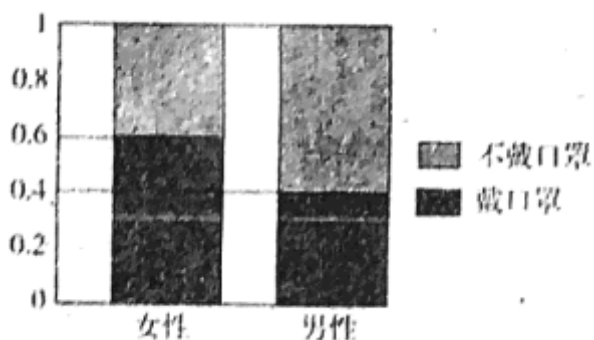


(2) 若从收入 (单位: 百元) 在  $[55, 65)$  的被调查者中随机选取 2 人进行追踪调查, 选中的 2 人中恰有  $X$

人赞成“楼市限购令”，求  $X$  的分布列与数学期望。

(3) 从月收入频率分布表的 6 组市民中分别随机抽取 3 名市民，恰有一组的 3 名市民都不赞成“楼市限购令”，根据表格数据，判断这 3 名市民来自哪组的可能性最大？请直接写出你的判断结果。

19. (12 分) 近年来，随着“雾霾”天出现的越来越频繁，很多人为了自己的健康，外出时选择戴口罩，在一项对人们雾霾天外出时是否戴口罩的调查中，共调查了 120 人，其中女性 70 人，男性 50 人，并根据统计数据画出等高条形图如图所示：



- (1) 利用图形判断性别与雾霾天外出戴口罩是否有关系并说明理由；
- (2) 根据统计数据建立一个  $2 \times 2$  列联表；
- (3) 能否在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为性别与雾霾天外出戴口罩的关系。

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2) \geq k_0$	0.10	0.05	0.010	0.005
$k_0$	2.706	3.841	6.635	7.879

20. (12 分) 已知圆  $M: (x+2\sqrt{3})^2 + y^2 = 64$  及定点  $N(2\sqrt{3}, 0)$ ，点  $A$  是圆  $M$  上的动点，点  $B$  在  $NA$  上，点  $G$  在  $MA$  上，且满足  $\vec{NA} = 2\vec{NB}$ ， $\vec{GB} \cdot \vec{NA} = 0$ ，点  $G$  的轨迹为曲线  $C$ 。

- (1) 求曲线  $C$  的方程；
- (2) 设斜率为  $k$  的动直线  $l$  与曲线  $C$  有且只有一个公共点，与直线  $y = \frac{1}{2}x$  和  $y = -\frac{1}{2}x$  分别交于  $P, Q$  两点。当  $|k| > \frac{1}{2}$  时，求  $\triangle OPQ$  ( $O$  为坐标原点) 面积的取值范围。

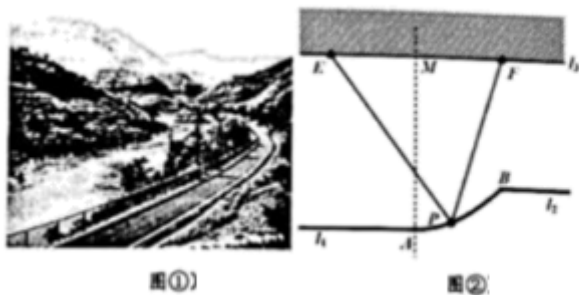
21. (12 分) 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_{n+1} = 2S_n + 1 (n \in N^*)$

- (I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(II) 在  $a_n$  和  $a_{n+1}$  之间插入  $n$  个实数, 使得这  $n+2$  个数依次组成公差为  $d_n$  的等差数列, 设数列  $\{\frac{1}{d_n}\}$  的前  $n$  项和为

$T_n$ , 求证:  $T_n < 2$ .

22. (10分) 某地为改善旅游环境进行景点改造. 如图, 将两条平行观光道  $l_1$  和  $l_2$  通过一段抛物线形状的栈道  $AB$  连通 (道路不计宽度),  $l_1$  和  $l_2$  所在直线的距离为 0.5 (百米), 对岸堤岸线  $l_3$  平行于观光道且与  $l_2$  相距 1.5 (百米) (其中  $A$  为抛物线的顶点, 抛物线的对称轴垂直于  $l_3$ , 且交  $l_3$  于  $M$ ), 在堤岸线  $l_3$  上的  $E, F$  两处建造建筑物, 其中  $E, F$  到  $M$  的距离为 1 (百米), 且  $F$  恰在  $B$  的正对岸 (即  $BF \perp l_3$ ).



(1) 在图②中建立适当的平面直角坐标系, 并求栈道  $AB$  的方程;

(2) 游客 (视为点  $P$ ) 在栈道  $AB$  的何处时, 观测  $EF$  的视角 ( $\angle EPF$ ) 最大? 请在 (1) 的坐标系中, 写出观测点  $P$  的坐标.

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

分情况讨论, 由间接法得到“数”必须排在前两节, “礼”和“乐”必须分开的事件个数, 不考虑限制因素, 总数有  $A_6^6$  种, 进而得到结果.

【详解】

当“数”位于第一位时, 礼和乐相邻有 4 种情况, 礼和乐顺序有 2 种, 其它剩下的有  $A_3^3$  种情况, 由间接法得到满足条件的情况有  $A_5^5 - C_4^1 A_2^2 A_3^3$

当“数”在第二位时，礼和乐相邻有 3 种情况，礼和乐顺序有 2 种，其它剩下的有  $A_3^3$  种，

由间接法得到满足条件的情况有  $A_5^5 - C_3^1 A_2^2 A_3^3$

共有： $A_5^5 - C_3^1 A_2^2 A_3^3 + A_5^5 - C_4^1 A_2^2 A_3^3$  种情况，不考虑限制因素，总数有  $A_6^6$  种，

故满足条件的事件的概率为： $\frac{A_5^5 - C_3^1 A_2^2 A_3^3 + A_5^5 - C_4^1 A_2^2 A_3^3}{A_6^6} = \frac{13}{60}$

故答案为：C.

**【点睛】**

解排列组合问题要遵循两个原则：①按元素(或位置)的性质进行分类；②按事情发生的过程进行分步。具体地说，解排列组合问题常以元素(或位置)为主体，即先满足特殊元素(或位置)，再考虑其他元素(或位置)。

2、C

**【解析】**

利用复数的除法，以及复数的基本概念求解即可。

**【详解】**

$$z = \frac{1-bi}{2+i} = \frac{2-b-(2b+1)i}{5}, \text{ 又 } z \text{ 的实部与虚部相等,}$$

$$\therefore b-2=2b+1, \text{ 解得 } b=-3.$$

故选:C

**【点睛】**

本题主要考查复数的除法运算，复数的概念运用。

3、C

**【解析】**

利用等差数列的性质化简已知条件，求得  $a_2$  的值。

**【详解】**

由于等差数列  $\{a_n\}$  满足  $S_4 = a_4 + 3$ ，所以  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_4 + 3$ ， $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ ， $3a_2 = 3, a_2 = 1$ 。

故选：C

**【点睛】**

本小题主要考查等差数列的性质，属于基础题。

4、D

**【解析】**

设点  $P(1-my, y)$ ，由  $|PA| = 2|PB|$ ，得关于  $y$  的方程. 由题意，该方程有解，则  $\Delta \geq 0$ ，求出正实数  $m$  的取值范围，即求正实数  $m$  的最小值.

**【详解】**

由题意，设点  $P(1-my, y)$ .

$$Q |PA| = 2|PB|, \therefore |PA|^2 = 4|PB|^2,$$

$$\text{即 } (1-my-1)^2 + y^2 = 4[(1-my-4)^2 + y^2],$$

$$\text{整理得 } (m^2 + 1)y^2 + 8my + 12 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = (8m)^2 - 4(m^2 + 1) \times 12 \geq 0, \text{ 解得 } m \geq \sqrt{3} \text{ 或 } m \leq -\sqrt{3}.$$

$$Q m > 0, \therefore m \geq \sqrt{3}, \therefore m_{\min} = \sqrt{3}.$$

故选: D.

**【点睛】**

本题考查直线与方程，考查平面内两点间距离公式，属于中档题.

5、C

**【解析】**

$$\therefore \text{集合 } A = \{x | 0 < x \leq 2\}, B = \{x | x < 1\},$$

$$\therefore A \cup B = (-\infty, 2]$$

点睛: 本题是道易错题，看清所问问题求并集而不是交集.

6、D

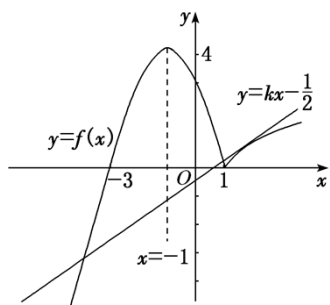
**【解析】**

由已知可将问题转化为:  $y=f(x)$  的图象和直线  $y=kx - \frac{1}{2}$  有 4 个交点，作出图象，由图可得: 点  $(1,0)$  必须在直线  $y=kx - \frac{1}{2}$  的下方，即可求得:  $k > \frac{1}{2}$ ；再求得直线  $y=kx - \frac{1}{2}$  和  $y=\ln x$  相切时， $k = \frac{\sqrt{e}}{e}$ ；结合图象即可得解.

**【详解】**

若关于  $x$  的方程  $f(x) = kx - \frac{1}{2}$  恰有 4 个不相等的实数根，

则  $y=f(x)$  的图象和直线  $y=kx - \frac{1}{2}$  有 4 个交点. 作出函数  $y=f(x)$  的图象，如图，



故点(1,0)在直线  $y=kx-\frac{1}{2}$  的下方.

$$\therefore k \times 1 - \frac{1}{2} > 0, \text{ 解得 } k > \frac{1}{2}.$$

当直线  $y=kx-\frac{1}{2}$  和  $y=\ln x$  相切时, 设切点横坐标为  $m$ ,

$$\text{则 } k = \frac{\ln m + \frac{1}{2}}{m} = \frac{1}{m}, \therefore m = \sqrt{e}.$$

此时,  $k = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{e}}{e}$ ,  $f(x)$  的图象和直线  $y=kx-\frac{1}{2}$  有 3 个交点, 不满足条件,

故所求  $k$  的取值范围是  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ ,

故选 D..

**【点睛】**

本题主要考查了函数与方程思想及转化能力, 还考查了导数的几何意义及计算能力、观察能力, 属于难题.

7、D

**【解析】**

$$Q(x+2i)i = y-i, \therefore -2+xi = y-i, \therefore \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases},$$

$$\text{则 } |x-yi| = |-1+2i| = \sqrt{5}.$$

故选 D.

8、A

**【解析】**

先由两直线垂直的条件判断出命题  $p$  的真假, 由基本不等式判断命题  $q$  的真假, 从而得出  $p, q$  的非命题的真假, 继而判断复合命题的真假, 可得出选项.

**【详解】**

已知对于命题  $P$ , 由  $1 \times 1 - m^2 = 0$  得  $m = \pm 1$ , 所以命题  $P$  为假命题;



关于命题  $q$ ，函数  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ，

当  $x > 0$  时， $f(x) = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ ，当  $x = \frac{4}{x}$  即  $x = 2$  时，取等号，

当  $x < 0$  时，函数  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  没有最小值，

所以命题  $q$  为假命题。

所以  $\neg p$  和  $\neg q$  是真命题，

所以  $p \wedge q$  为假命题， $p \vee q$  为假命题， $p \wedge \neg q$  为假命题， $\neg p \wedge \neg q$  为真命题，所以真命题的个数为 1 个。

故选：A.

**【点睛】**

本题考查直线的垂直的判定和基本不等式的应用，以及复合命题的真假的判断，注意运用基本不等式时，满足所需的条件，属于基础题。

9、A

**【解析】**

根据向量平行的坐标表示即可求解。

**【详解】**

$$\text{Q } \vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (x, 3), \vec{a} // \vec{b},$$

$$\therefore 4 \times 3 = 2x,$$

$$\text{即 } x = 6,$$

故选：A

**【点睛】**

本题主要考查了向量平行的坐标运算，属于容易题。

10、B

**【解析】**

由已知结合等差数列的通项公式及求和公式可求  $d$ ， $a_1$ ，然后结合等差数列的求和公式即可求解。

**【详解】**

$$\text{解：因为 } S_{13} = 0, a_3 + a_4 = 21,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 13a_1 + 13 \times 6d = 0 \\ 2a_1 + 5d = 21 \end{cases}, \text{解可得, } d = -3, a_1 = 18,$$

则  $S_7 = 7 \times 18 + \frac{1}{2} \times 7 \times 6 \times (-3) = 63$ .

故选: B.

**【点睛】**

本题主要考查等差数列的通项公式及求和公式的简单应用, 属于基础题.

11、B

**【解析】**

对函数  $f(x)$  化简可得  $f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6})$ , 进而结合三角函数的最值、周期性、单调性、零点、对称性及平移变换,

对四个命题逐个分析, 可选出答案.

**【详解】**

因为  $f(x) = 1 - 2\cos^2(\omega x + \frac{\pi}{3}) = -\cos(2\omega x + \frac{2\pi}{3}) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6})$ , 所以周期  $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$ .

对于①, 因为  $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi = \frac{1}{2}T$ , 所以  $T = 2\pi = \frac{\pi}{\omega}$ , 即  $\omega = \frac{1}{2}$ , 故①错误;

对于②, 函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后得到的函数为  $y = \sin(2\omega x - \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$ , 其图象关于  $y$  轴对称, 则

$-\frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 解得  $\omega = -1 - 3k (k \in \mathbf{Z})$ , 故对任意整数  $k$ ,  $\omega \notin (0, 2)$ , 所以②错误;

对于③, 令  $f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}) = 0$ , 可得  $2\omega x + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 则  $x = \frac{k\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega}$ ,

因为  $f(0) = \sin \frac{\pi}{6} > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $[0, 2\pi]$  上第 1 个零点  $x_1 > 0$ , 且  $x_1 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega}$ , 所以第 7 个零点

$x_7 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + 3T = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + \frac{3\pi}{\omega} = \frac{41\pi}{12\omega}$ , 若存在第 8 个零点  $x_8$ , 则

$x_8 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + \frac{7}{2}T = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + \frac{7\pi}{2\omega} = \frac{47\pi}{12\omega}$ ,

所以  $x_7 \leq 2\pi < x_8$ , 即  $\frac{41\pi}{12\omega} \leq 2\pi < \frac{47\pi}{12\omega}$ , 解得  $\frac{41}{24} \leq \omega < \frac{47}{24}$ , 故③正确;

对于④, 因为  $f(0) = \sin \frac{\pi}{6}$ , 且  $0 \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ , 所以  $\begin{cases} 2\omega(-\frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} \\ 2\omega \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ , 解得  $\omega \leq \frac{2}{3}$ , 又  $\omega > 0$ , 所以

$0 < \omega \leq \frac{2}{3}$ , 故④正确.

故选: B.

**【点睛】**

本题考查三角函数的恒等变换, 考查三角函数的平移变换、最值、周期性、单调性、零点、对称性, 考查学生的计算求解能力与推理能力, 属于中档题.

12、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/656101141055010121>