重庆市第八中学校2023-2024学年高二上学期期末考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知事件A与事件B互斥，且$P(A)=0.3, P(B)=0.5$，则（　）

A．$P(AB)=0.15$　B．$P(A+B)=0.8$　C．$P(\overline{A})=0.5$　D．$P(\overline{B})=0.6$

2．已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的左焦点是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$的左顶点，则双曲线的渐近线为（　）

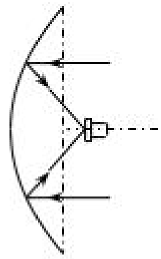
A．$y=\pm\frac{4}{5}x$　B．$y=\pm\frac{3}{5}x$　C．$y=\pm\frac{4}{3}x$　D．$y=\pm\frac{3}{4}x$

3．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=9, S_4=40$，则数列$\{a_n\}$的公差$d=$（　）

A．3　B．2　C．$\frac{3}{2}$　D．4

4．某学习小组研究一种卫星接收天线（如图①所示），发现其曲面与轴截面的交线为抛物线，在轴截面内的卫星波束呈近似平行状态射入形为抛物线的接收天线，经反射聚焦到焦点处（如图②所示）． 已知接收天线的口径（直径）为2.4，深度为0.4，则该抛物线的焦点到顶点的距离为（　）


①


②

A．0.9　B．1.8　C．1.2　D．1.05

5．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M是棱CC_1的中点，则异面直线BM与AC所成角的正弦值为（　）

A．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　B．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　C．$\frac{\sqrt{15}}{5}$　D．$\frac{\sqrt{10}}{10}$

6．直线 $y=kx+3$与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$相交于M,N两点，若 $|MN|\geq 2\sqrt{3}$，则该直线斜率k的取值范围是（　）

A．$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$　　B．$\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

C．$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　D．$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

7．直线l：$x-2y+\sqrt{3}=0$经过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左焦点$F$，且与椭圆交于$A,B$两点，若$M$为线段$AB$中点，$|MF|=|OM|$，则椭圆的离心率为（　）

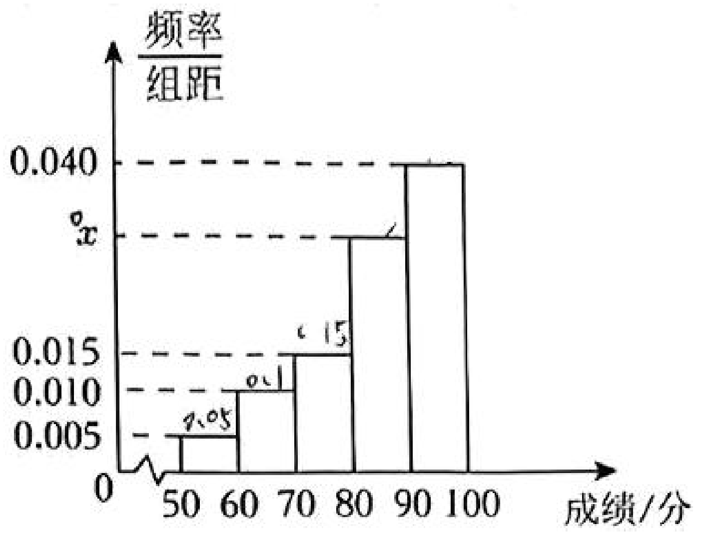
A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

8．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_n+a_{n+1}=2\times\left(-1\right)^n$，$n\in N^*$，且$a_2=5$，记数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，则$S_{49}=$（　）

A．$\frac{1}{13}$　　B．$\frac{1}{15}$　　C．$\frac{2}{15}$　　D．2

二、多选题

9．重庆八中组织全体学生参加了主题为“奋斗百年路，启航新征程”的知识竞赛，随机抽取了200名学生进行成绩统计，发现抽取的学生的成绩都在50分至100分之间，进行适当分组后（每组的取值区间均为左闭右开），如图所示，画出频率分布直方图，下列说法正确的是（　）



A．成绩在区间$[90,100)$内的学生有46人　B．图中x的值为0.030

C．估计全校学生成绩的中位数约为86.67　D．估计全校学生成绩的80%分位数为90

三、单选题

10．已知圆O：$x^2+y^2=4$和圆$C:(x-3)^2+(y-3)^2=10$，则下列说法不正确的是（　）

A．圆O与圆C有四条公切线

B．点P为圆O上一动点，$|PC|$的最大值为$3\sqrt{2}+2$

C．圆O与圆C的公共弦所在直线方程为$x+y=2$

D．圆O与圆C的公共弦长为$2\sqrt{2}$

四、多选题

11．设数列 $\{a_n\}$的前 n项和为 S_n，满足 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，其中$a_1=19$，$a_2=17$，则下列选项正确的是（　）

A．$\{a_n\}$为等差数列

B．$\dfrac{S_n}{n}=20-n$

C．当$n=11$时，S_n有最大值

D．设$b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，则当$n=8$或$n=10$时，数列$\{b_n\}$的前n项和取得最大值

12．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过左焦点$F_1$作一条渐近线的垂线，垂足为$P$，过右焦点$F_2$作一条直线交双曲线的右支于$A$，$B$两点，$\triangle F_1AB$的内切圆与$F_1A$相切于点$Q$，则下列选项正确的是（　）

A．线段AB的最小值为$\dfrac{b^2}{a}$

B．$\triangle F_1AB$的内切圆与直线AB相切于点F_2

C．当$|PF_1|=|QF_1|$时，双曲线的离心率为$\sqrt{5}$

D．当点F_1关于点P的对称点在另一条渐近线上时，双曲线的渐近线方程为$\sqrt{3}x\pm y=0$

五、填空题

13．在等比数列 $\{a_n\}$中，$a_1+a_2=3,a_5+a_6=6$，则 $a_9+a_{10}=$_________.

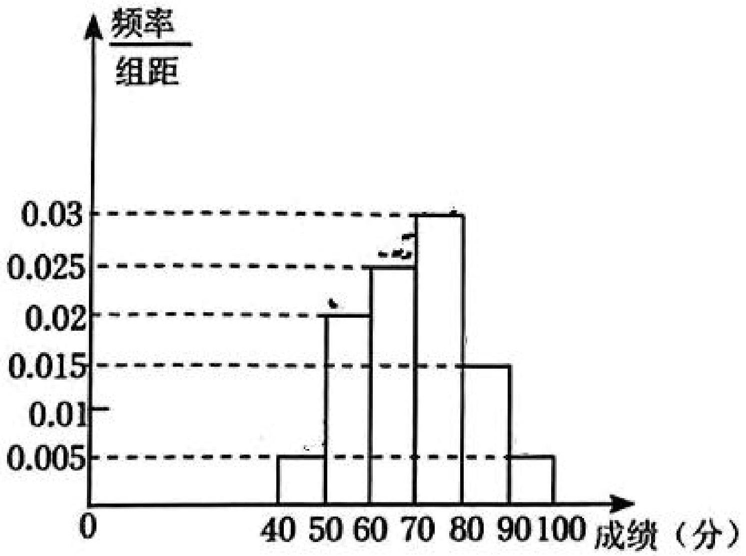
14．某公司招新面试中有3道难度相当的题目，小明答对每道题目的概率都是0.7.若每位面试者共有三次机会，一旦某次答对抽到的题目，则面试通过，否则就一直抽题到第3次为止，则小明最终通过面试的概率为______.

15．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+2}$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 8 项和$S_8=$_________.

16．已知抛物线$C:y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为$F$，过点$M\left(2,0\right)$的直线交抛物线$C$于 A,B两点，若$|AM|=2|MB|,|AF|=5$，则$p=$_________.

六、解答题

17．为迎接冬季长跑比赛，重庆八中对全体高二学生举行了一次关于冬季长跑相关知识的测试，统计人员从高二学生中随机抽取 100 名学生的成绩作为样本进行统计，测试满分为 100 分，统计后发现所有学生的测试成绩都在区间$\left[40,100\right]$内，并制成如图所示的频率分布直方图.



(1)估计这 100 名学生的平均成绩；

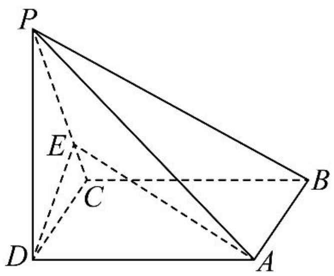
(2)若在区间$\left[70,80\right)$内的学生测试成绩的平均数和方差为 74 和 26，在区间$\left[80,100\right]$内的学生测试成绩的平均数和方差为 89 和 106，据此估计在$\left[70,100\right]$内的所有学生测试成绩的平均数和方差.

18．已知数列$\left\{a_n\right\}$的首项$a_1=1$，设S_n为数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，且有$2S_n=\left(n+1\right)a_n$．

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)令$c_n=a_n\cdot 2^n$，求数列$\left\{c_n\right\}$的前n项和T_n．

19．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$AD=PD=2CD=2$，$PB=3$，点E为棱PC上的点，且$BC\perp DE$．



(1)证明：$AD\perp PD$；

(2)若$PE=2CE$，求直线DE与平面PAC所成角的大小．

20．已知抛物线C：$y^2=2px$过点$P\left(1,2\right)$，过点$\left(0,1\right)$作直线l与抛物线C交于不同的两点A,B，过点A作x轴的垂线分别与直线OP,OB交于点M,N，其中O为原点.

(1)求抛物线C的方程，并求其焦点坐标和准线方程；

(2)证明：M为线段AN的中点.

21．已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的首项$a_1=-1$，公差$d\le 0$．记$\left\{a_n\right\}$的前n项和为$S_n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

(1)若$S_5^2-25a_2a_4=25$，求S_n；

(2)若对于每个$n\in \mathrm{N}^*$，存在实数x，使$a_n+x,a_{n+1}+3x,a_{n+2}+8x$成等比数列，求公差$d$的取值范围.

22．设椭圆$E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的右焦点为$F$，点$A,B,P$在椭圆$E$上，点$M$是线段$AB$的中点，点$F$是线段$MP$的中点．

(1)若M为坐标原点，且$\triangle ABP$的面积为$2\sqrt{3}$，求直线AB的方程；

(2)求$\triangle ABP$面积的最大值．

参考答案：

1．B

【分析】根据事件概率的基本运算法则直接计算求解.

【详解】对于 A，由于不清楚事件 A 与事件 B 是否相互独立，所以无法计算 $P(AB)$，故 A 错误；

对于 B，因为事件 A 与事件 B 互斥，所以 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.3+0.5=0.8$，故 B 正确；

对于 C，$P(\overline{A})=1-P(A)=0.7$，故 C 错误；

对于 D，$P(\overline{B})=1-P(B)=0.5$，故 D 错误.

故选：B

2．D

【分析】根据椭圆和双曲线相关基本知识直接求解即可.

【详解】设椭圆焦距为 $2c(c>0)$，

则 $c^2=25-9=16$，则 $c=4$，所以椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左焦点为 $(-4,0)$，

所以双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左顶点为 $(-4,0)$，

所以 $a=4$，所以 $a^2=16$，

所以双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{3}{4}x$.

故选：D

3．B

【分析】根据等差数列通项公式和求和公式直接计算求解.

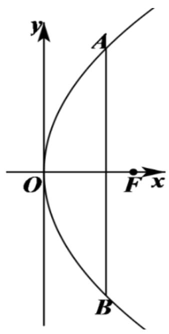
【详解】由题意得，$\begin{cases} a_2=a_1+d=9 \\ S_4=4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=40 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1=7 \\ d=2 \end{cases}$.

故选：B

4．A

【分析】根据题意建立平面直角坐标系求出抛物线方程即可得到答案.

【详解】如图所示，在接收天线的轴截面所在平面建立直角坐标系，使接收天线的顶点（即抛物线的顶点）与原点重合，焦点在 x 轴上，



设抛物线方程为$y^2=2px\left(p>0\right)$，代入$A\left(0.4,1.2\right)$，

所以$1.2\times1.2=2p\times0.4$，解得$p=1.8$，所以抛物线方程为$y^2=3.6x$，

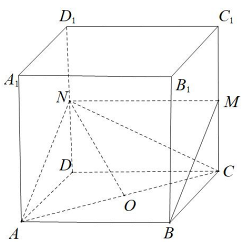
则该抛物线的焦点到顶点的距离为$\frac{p}{2}=0.9$.

故选：A

5．C

【分析】通过平行关系将异面直线夹角转化为相交直线夹角，结合等腰三角形性质求解正弦值即可.

【详解】如图所示，取DD_1中点N，连接AN,CN,AC,MN，取AC中点O，连接ON，



则$MN//CD//AB,MN=CD=AB$，

所以四边形$ABMN$是平行四边形，所以$BM//AN$，

所以$\angle NAC$或其补角是异面直线BM与AC所成角，

设正方体棱长为2，则$AN=CN=\sqrt{5},AC=2\sqrt{2}$，

在等腰$\triangle ANC$中，O是AC中点，所以$ON\perp AC$，

所以$\sin\angle NAC=\frac{ON}{AN}=\frac{\sqrt{AN^2-\left(\frac{1}{2}AC\right)^2}}{AN}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

即异面直线BM与AC所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

故选：C

6．C

【分析】利用垂径定理及勾股定理表示出弦长$|MN|$，列出关于k的不等式，求出不等式的解集，即可得到k的范围.

【详解】由圆的方程得：圆心$(2,3)$，半径$r=2$，

$\because$ 圆心到直线$y=kx+3$，即$kx-y+3=0$的距离$d=\dfrac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}},|MN|\geq 2\sqrt{3}$，

$\therefore 2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\dfrac{4k^2}{k^2+1}}\geq 2\sqrt{3}$，

变形整理得$4k^2+4-4k^2\geq 3k^2+3$，即$k^2\leq\dfrac{1}{3}$，解得$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leq k\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

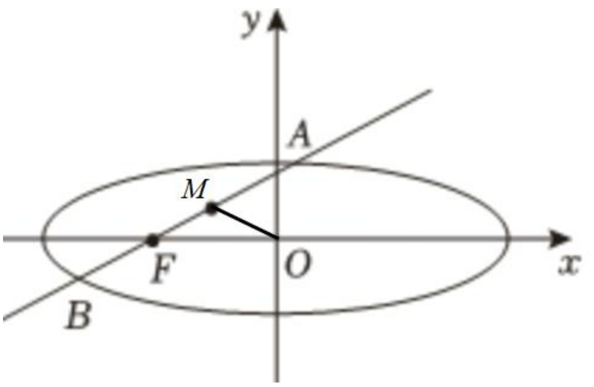
$\therefore k$的取值范围是$\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$，

故选：C.

7．C

【分析】根据$|MF|=|OM|$得到$k_{OM}=-k_l=-\dfrac{1}{2}$，结合点差法相关知识计算求得$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$，进而求得离心率.

【详解】如图所示，



因为$|MF|=|OM|$，所以$\angle MFO=\angle MOF$，

所以$k_{OM}=-k_l=-\dfrac{1}{2}$，

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$，

则$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减得$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，

则$-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，

因为直线l：$x-2y+\sqrt{3}=0$，M为线段AB中点，$k_{OM}=-\frac{1}{2}$，

所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}$，$\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}$，

代入上式得$-\frac{b^2}{a^2}\cdot(-2)=\frac{1}{2}$，则$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，

所以椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：C.

8．A

【分析】按n为奇数和偶数讨论得到a_na_{n+1}的通项公式，利用裂项相消法求数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和.

【详解】$a_1=-2-a_2=-7$，当$n=2k-1\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$时，$a_n+a_{n+1}=-2$，$a_{n+1}+a_{n+2}=2$，

两式相减得，$a_{n+2}-a_n=4$，

所以$\{a_n\}$的奇数项是以-7为首项，4为公差的等差数列，$a_n=-7+4\times\left(\frac{n+1}{2}-1\right)=2n-9$，

当$n=2k\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$时，$a_n+a_{n+1}=2$，$a_{n+1}+a_{n+2}=-2$，两式相减得，$a_{n+2}-a_n=-4$，

所以$\{a_n\}$的偶数项是以5为首项，-4为公差的等差数列，$a_n=5-4\times\left(\frac{n}{2}-1\right)=9-2n$；

所以$a_n=(-1)^{n+1}(2n-9)$，$a_na_{n+1}=(-1)^{n+1}(2n-9)\cdot(-1)^{n+2}(2n-7)=-(2n-9)(2n-7)$，

设$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，则$b_n=-\frac{1}{(2n-9)(2n-7)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-9}-\frac{1}{2n-7}\right)$，

所以$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-9}-\frac{1}{2n-7}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}-\frac{1}{2n-7}\right)=\frac{n}{14n-49}$$，则$S_{49}=\frac{49}{14\times49-49}=\frac{1}{13}$.

故选：A

9．BC

【分析】根据题目中的频率分布直方图，结合中位数和百分位数相关概念求解即可.